

Ala a semiguscio

(a) Come si è già visto, la sollecitazione ideale, per una struttura di cui si abbia interesse a ridurre al massimo il peso, è quella degli sforzi a membrana, ossia contenuti nello spessore della struttura, Fig. 1.

Tuttavia, in questo modo di lavorare è insito un notevole inconveniente, che deriva dai fenomeni di instabilità dell'equi

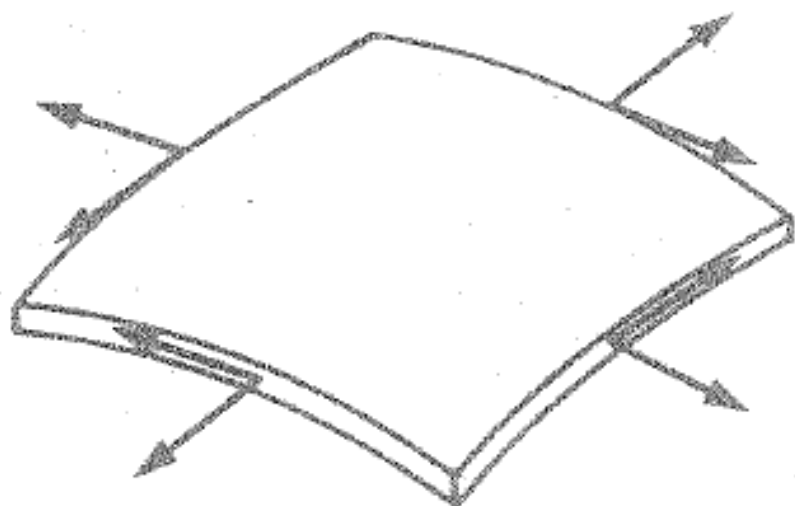


Fig. II-1-1 - Sforzi a membrana.

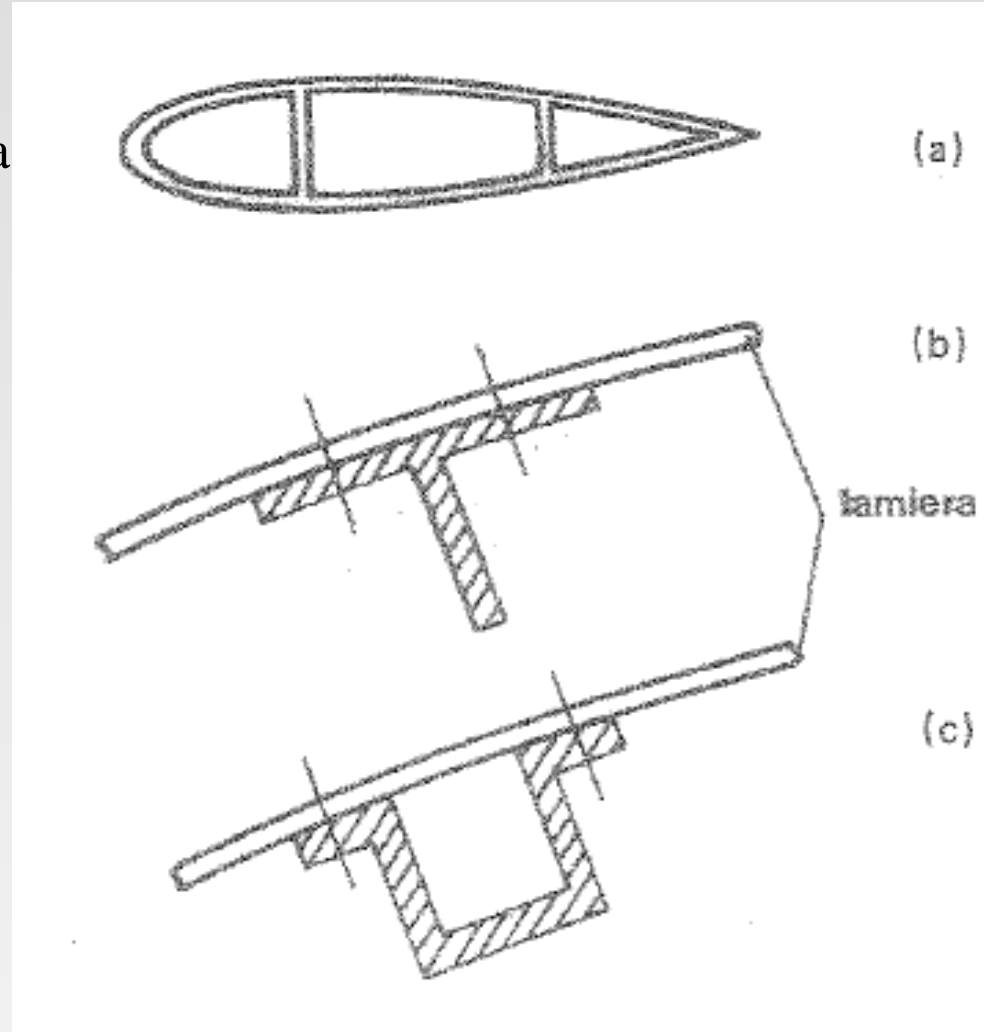
librio elastico, per cui, molte volte, il "semiguscio aeronautico" è incapace di assorbire sforzi di compressione: mentre quelli di trazione non possono essere, in generale, che assai ridotti, in vista appunto del piccolo spessore delle lamiere. E, anzi, è proprio da questa

circostanza, che nasce la denominazione "semiguscio", in contrapposizione al guscio vero e proprio, dove nessuna sollecitazione è a priori preclusa a nessun elemento.

Torsione

Il problema della torsione è di primaria importanza nelle strutture aeronautiche. Basti pensare all'effetto dell'angolo di incidenza sulla distribuzione di portanza.

La sezione di una struttura alare può essere considerata a connessione multipla (a) mentre il profilato a connessione semplice (b) o ad Omega (c)



Parete Sottile

Se si considera una una sbarra prismatica indefinita secondo ass y e sottoposta ad un momento torcente si ottengono degli sforzi d'angenziali come quelli in figura. La sollecitazione τ_{xy} parallela ai lati lunghi e' intrecciata e varia fortemente lungo lungo lo spessore (a) mentre . La sua variazione secondo I lati e' molto più debole e comunque si annulla in M e N

La sollecitazione τ_{yz} normale ai lati lunghi varia in maniera parabolica dovendo annullarsi sulle facce superiore e inferiore e varia lentamente secondo I lati lunghi.

Il momento torcente dovuto alla τ_{yz} è uguale a quello della τ_{xy}

Purtroppo una sezione di questo tipo ha una rigidezza torsionale molto modesta

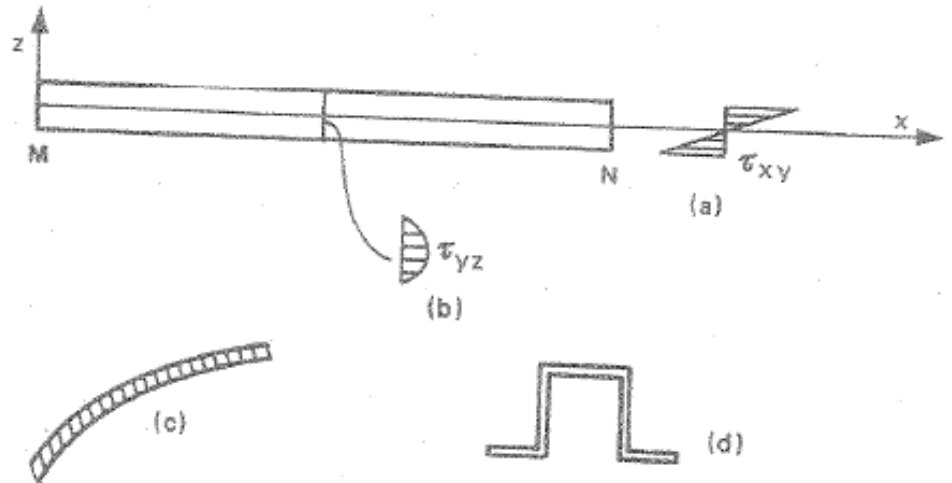


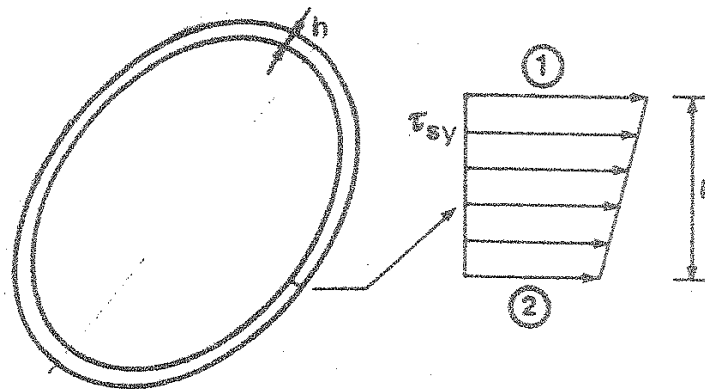
Fig. II-I-3 — Sezioni sottili aperte.

Sezione a parete sottile a connessione multipla (o chiusa)

In questo caso non esistono punti dove la

$$\tau_{xy}$$

parallela ai lati lunghi (linea media della sezione) si annulla come avviene nelle sezioni aperte. Dunque la τ_{xy} non si inverte più lungo lo spessore e la distribuzione degli sforzi diventa più efficiente: quasi costante

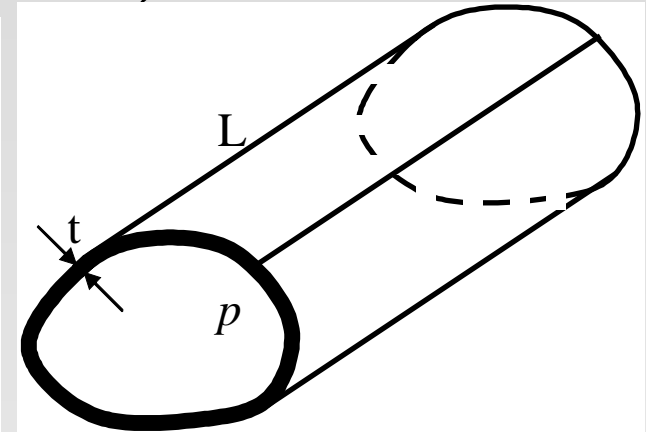


La Trave Aeronautica (sezioni chiuse)

Le strutture in campo aerospaziale vengono generalmente realizzate in “parete sottile” cioè tali che :

$$t \ll p \ll L$$

ed irrigidite con centine, correnti, ...



Le centine e le ordinate hanno caratteristiche così diverse dal rivestimento e dai correnti da poterle considerare:

- infinitamente rigide nel piano, per cui è possibile assumere che la forma della sezione trasversale non si modifica quando caricata;
- perfettamente flessibili fuori del piano, per cui la sezione se non vincolata risulta libera di distorcersi (warping non impedito).

Con tali ipotesi lo schema di calcolo di una trave in parete sottile si basa sulle formule semplici e pratiche.

Tali formule devono però essere impiegate con accortezza, verificando che le ipotesi su cui si fondano siano rispettate.

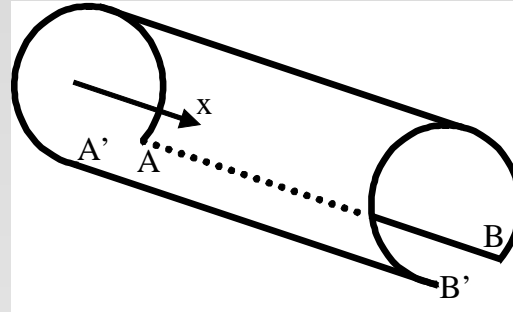
In questa analisi di accertamento dell'applicabilità della teoria, bisogna tenere ben presente le seguenti peculiarità delle strutture in parete sottile:

1. Il principio di St Venant **è applicabile con accortezza**: in particolare gli effetti di bordo sono molto più estesi di quelli che si hanno in strutture piene; pertanto in prossimità del vincolo occorre una analisi più precisa.

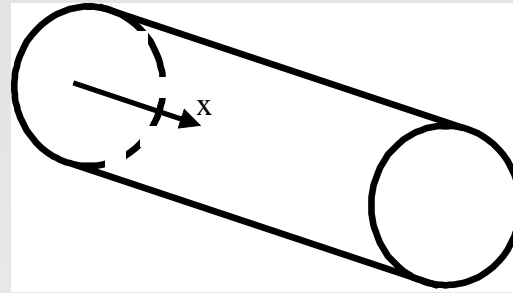
2. Gli sforzi di taglio **non sono** in genere trascurabili rispetto a quelli assiali, ma assumono valori elevati e significativi.

Torsione

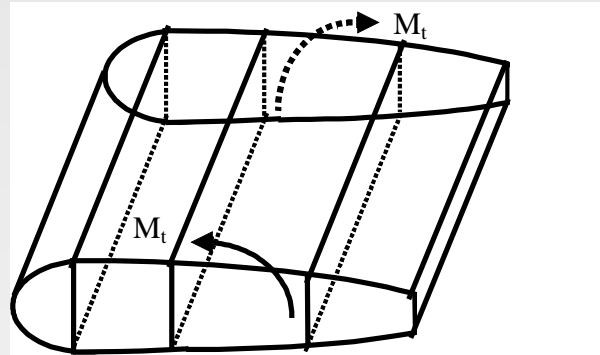
1. Sezioni Aperte



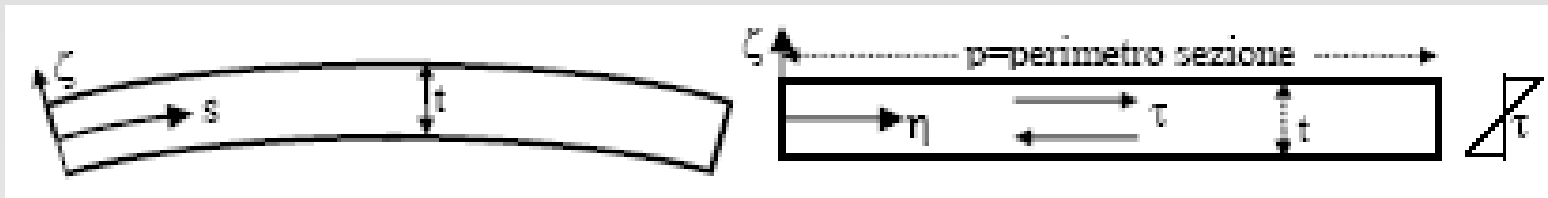
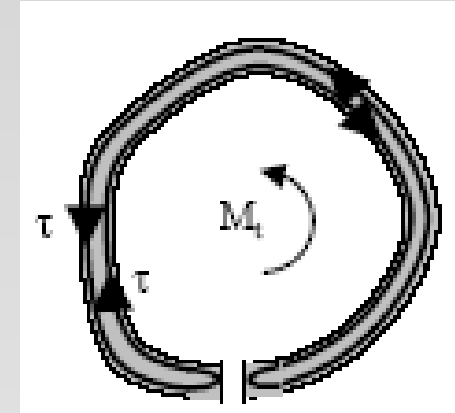
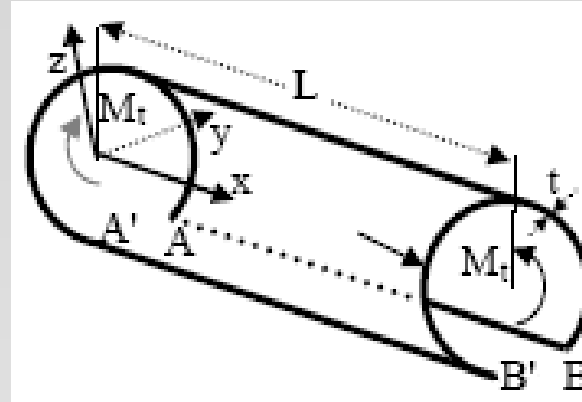
2. Sezioni Chiuse
Uni-cellulari



3. Sezioni chiuse
Multi-cellulari.



1. Torsione in Sez. Aperte

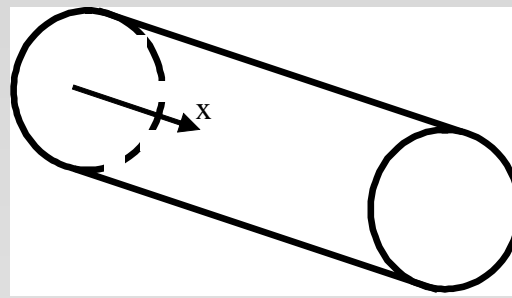


$$J = \frac{pt^3}{3} \Rightarrow B = JG = \frac{Gpt^3}{3}$$

$$\phi \equiv \frac{d\phi}{dx} = \frac{M_t}{B} = \frac{3M_t}{Gt^3 p} \Rightarrow \phi = \frac{3M_t}{G} \frac{L}{t^3 p}$$

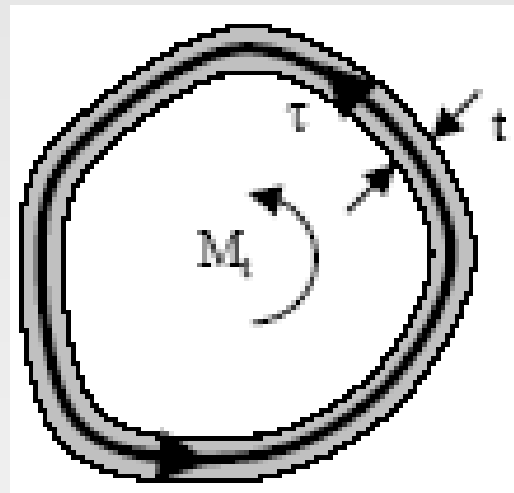
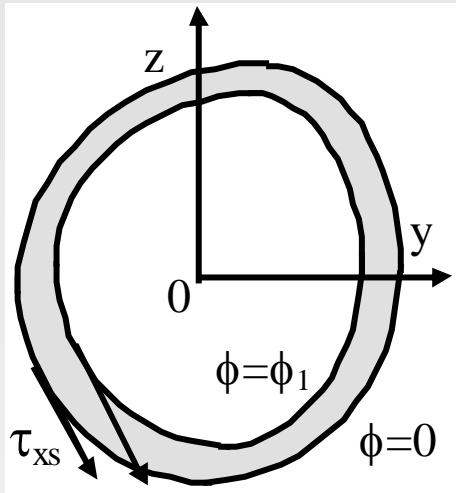
Poiché $L/t^3 p \gg 1$, le sezioni subiscono forti rotazioni e quindi non adatte a reggere a momenti torcenti.

2. Sezioni Chiuse Uni-cellulari



Lo studio della torsione di sezioni anche cave ma di forte spessore, salvo il caso di sezione circolare, presenta difficoltà analoghe a quelle delle sezioni piene.

Se però lo spessore è sottile si può ipotizzare che lo sforzo di taglio τ sia costante (lungo la sezione e nello spessore) e tangente alla linea media del profilo. Questo consente soluzioni molto semplici e di facile impiego.



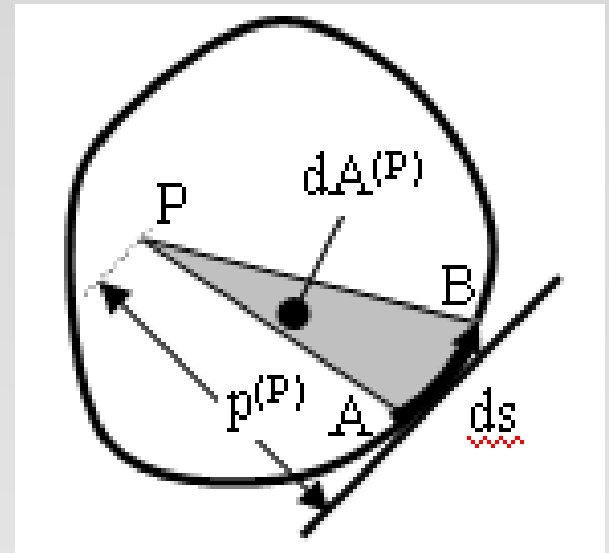
Flusso di taglio

$$q = \tau t$$

Torsione nelle sezioni chiuse

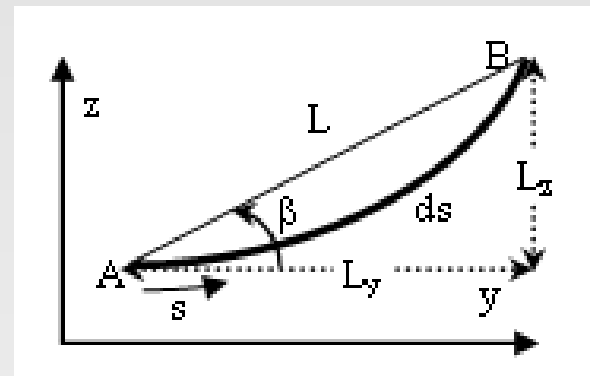
–Momento (torcente) di q sull'elemento ds a distanza $p(P)$ da P , risulta:

$$M_t^{(P)} = \int_A^B q p^{(P)} ds = 2 \int_A^B q dA^{(P)}$$



–Risultante R di q sull'elemento ds

$$\begin{cases} R_y = \int_A^B q_y ds = q \int_A^B \frac{dy}{ds} ds = qL_y \\ R_z = \int_A^B q_z ds = q \int_A^B \frac{dz}{ds} ds = qL_z \end{cases}$$



$$|R| = q \sqrt{L_y^2 + L_z^2} = qL$$
$$\beta = \tan^{-1} \frac{R_z}{R_y} = \tan^{-1} \frac{L_z}{L_y}$$

1° Formula di Bredt

Su tutto il contorno

–Momento (torcente) di q

$$M_t = 2 \oint q dA^{(P)} = 2Aq \Rightarrow q = \frac{M_t}{2A}$$

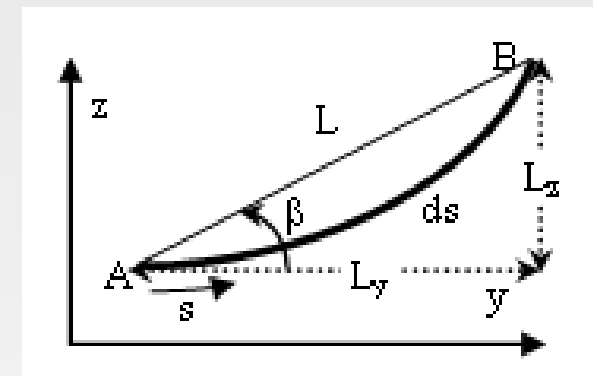
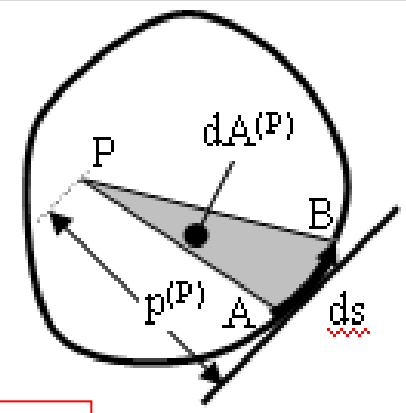
Si noti come si possa calcolare il flusso di taglio attraverso le sole condizioni di equilibrio del momento torcente (problema staticamente determinato).

Nelle sezioni piene questo non era possibile.

–Risultante di q

$$R_y = q \oint dy = 0$$

$$R_z = q \oint dz = 0$$



2° Formula di Bredt

$$\gamma = \gamma'_s + \gamma'_x = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} + p^{(P)} \frac{d\varphi}{dx} = \tau / G$$

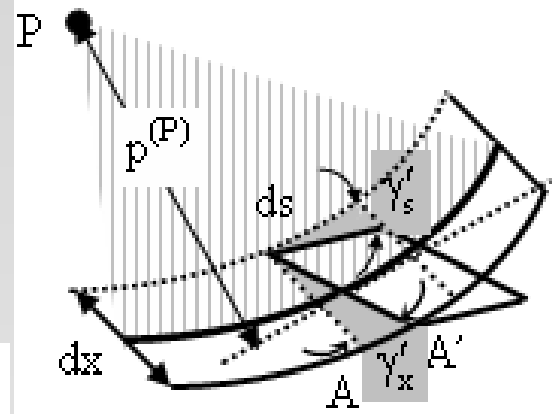
$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\tau}{G} - p^{(P)} \frac{d\varphi}{dx} \Rightarrow u(s) - u(0) = \int_0^s \left(\frac{\tau}{G} - p^{(P)} \frac{d\varphi}{dx} \right) ds$$

$$u(s) - u(0) = \int_0^s \frac{q}{Gt} ds - \frac{d\varphi}{dx} \int_0^s p^{(P)} ds = \int_0^s \frac{q}{Gt} ds - 2 \frac{d\varphi}{dx} \int_0^s dA^{(P)}$$

Estendendo l'integrale su tutto il contorno

$$0 = \oint \frac{q}{Gt} ds - 2A \frac{d\varphi}{dx} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{2A} \oint \frac{q ds}{Gt} = \frac{M_t}{4A^2} \oint \frac{ds}{Gt} = \frac{M_t}{4A^2} l_0$$

$$M_t = B\varphi' \Rightarrow B = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{Gt}} = \frac{4A^2}{l_0}$$



Spostamento fuori del piano (Ingobbamento)

$$u(s) - u(0) = \int_0^s \frac{q}{Gt} ds - 2 \frac{d\varphi}{dx} \int_0^s dA^{(P)}$$

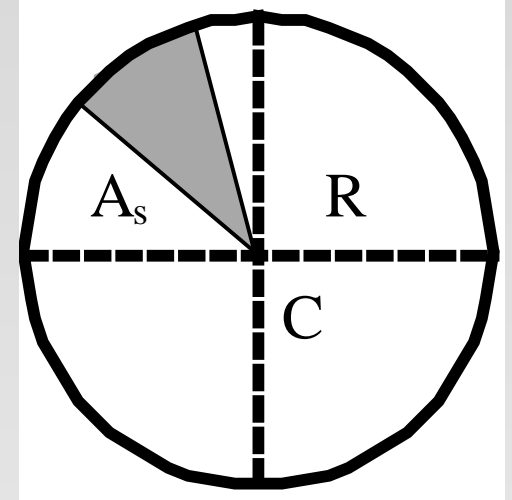
$$q = \frac{M_t}{2A} ; \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{4A^2} l_0$$

$$u(s) = u(0) + \frac{M_t}{2A} \int_0^s \frac{1}{Gt} ds - 2 \frac{M_t}{4A^2} l_0 \int_0^s dA^{(P)}$$

$$u(s) = u_0 + \frac{M_t l_0}{2A} \int_0^s \left(\frac{dl}{l_0} - \frac{dA^{(P)}}{A} \right)$$

Sezione circolare

$$u(s) = u_0 + \frac{M_t l_0}{2A} \int_0^s \left(\frac{dl}{l_0} - \frac{dA^{(P)}}{A} \right)$$



$$l_0 = \oint \frac{ds}{Gt} = \frac{2\pi R}{Gt} \quad ; \quad l_s = \int_0^s \frac{ds}{Gt} = \frac{s}{Gt} \Rightarrow \frac{l_s}{l_0} = \frac{s}{2\pi R}$$

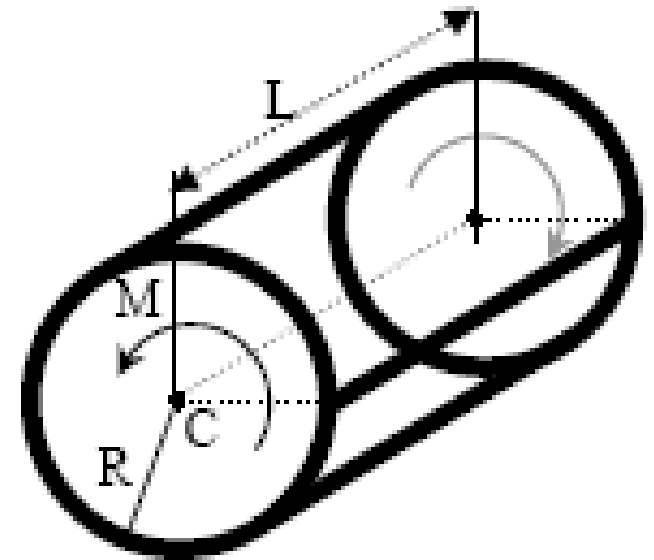
$$A = \pi R^2 \quad ; \quad A_s^{(C)} = \frac{R}{2} \int_0^s ds = \frac{Rs}{2} \Rightarrow \frac{A_s^{(C)}}{A} = \frac{s}{2\pi R}$$

$$u(s) = u_0$$

Esempio

Si consideri il tratto L di fusoliera monocoque di figura, a sezione circolare e di spessore costante $t \ll R$, soggetta ad momento torcente M alle due estremità. Si confrontino sforzi, rigidezza torsionale e spostamento angolare di una generica sezione (presa ortogonale all'asse) nei due casi:

- 1)–La sezione è considerata chiusa;
- 2)–La sezione è considerata aperta in 2 causa una frattura che corre lungo tutta la generatrice 12.



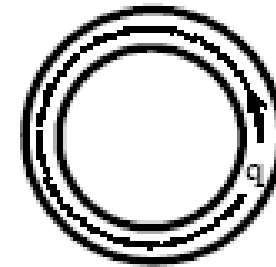
Sezione chiusa

Lo sforzo di taglio conseguente alla torsione è costante nello spessore t della parete ed in base alle formule di Bredt:

$$M = 2Aq \Rightarrow \tau_c = \frac{q}{t} = \frac{M}{2At} = \frac{M}{2\pi R^2 t}$$

$$B_c = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{Gt}} = \frac{4(\pi R^2)^2 Gt}{2\pi R} = 2\pi R^3 Gt$$

$$\phi_c = \frac{M}{B_c} = \frac{M}{2\pi R^3 Gt}$$

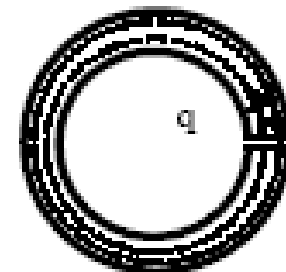


Sezione aperta

$$\tau_A = \frac{3M}{2\pi R t^2}$$

$$B_A = GJ = \frac{2\pi R G t^3}{3}$$

$$\phi_A = \frac{M}{B} = \frac{3M}{2\pi R G t^3}$$



Per confrontare i due casi di sezione aperta e chiusa soggetta a torsione, valutiamo i rapporti tra rigidezza torsionale, sforzi e spostamento angolare:

$$\frac{B_C}{B_A} = \frac{3R^2}{t^2} = \frac{3D^2}{4t^2} \Rightarrow B_C = \frac{3D^2}{4t^2} B_A$$

$$\frac{\phi_C}{\phi_A} = \frac{t^2}{3R^2} = \frac{4t^2}{3D^2} \Rightarrow \phi_C = \frac{4t^2}{3D^2} \phi_A$$

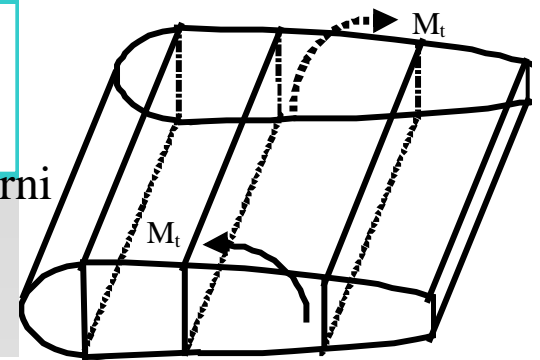
$$\frac{\tau_C}{\tau_A} = \frac{t}{3R} = \frac{2t}{3D} \Rightarrow \tau_C = \frac{2t}{3D} \tau_A$$

dove $D=2R$ è il diametro della sezione.

Il rapporto della rigidezza torsionale tra sezione chiusa ed aperta è dell'ordine di $(D/t)^2$, ovvero la sezione chiusa è estremamente più efficiente a torsione; cosa peraltro evidente dallo spostamento angolare che risulta circa $(t/D)^2$ più piccolo e dal valore dello sforzo di taglio, anch'esso di circa (t/D) più piccolo.

Sezioni Chiuse Multi-celle

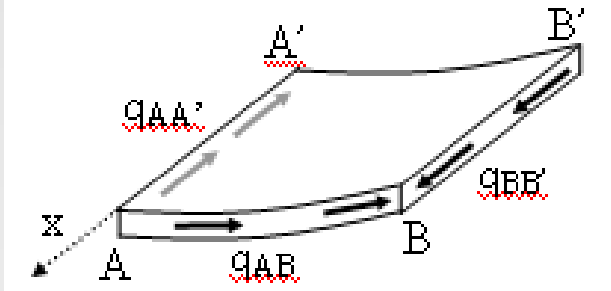
Setti interni



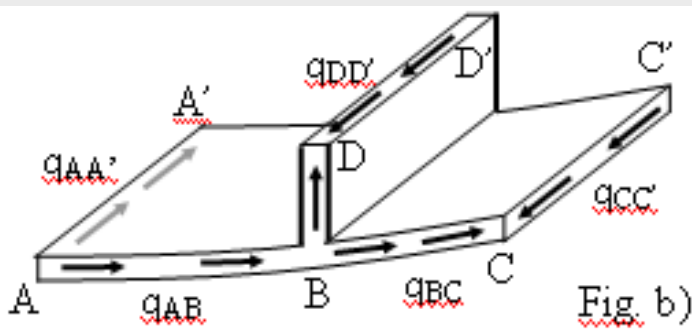
Si assumono le seguenti ipotesi:

- i momenti torcenti sono dati da una distribuzione di sforzi di taglio uguale a quella che si ha su una generica sezione.
- le sezioni sono libere di distorcersi mantenendo inalterata la forma date le centine rigide nel loro piano e completamente flessibili fuori del loro piano.

Equilibrio lungo x

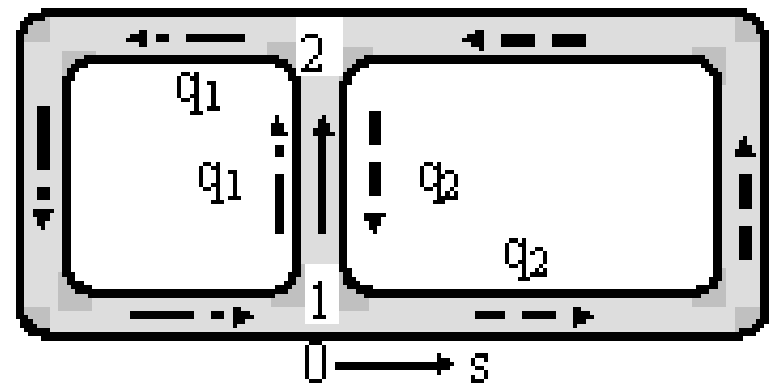


$$q_{AA'} - q_{BB'} = 0 \Rightarrow q_B = q_A \Rightarrow q_{AB} = \text{costante}$$



$$q_{AA'} - q_{DD'} - q_{CC'} = 0 \Rightarrow q_{AB} = q_{BD} + q_{BC}$$

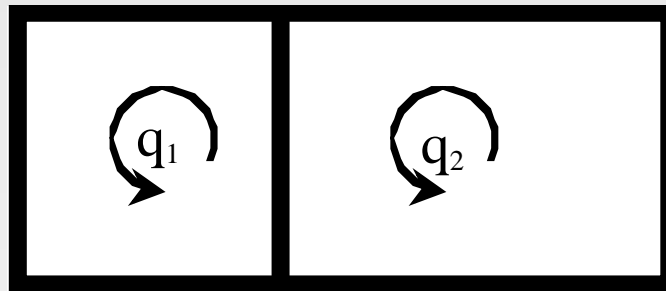
Bi-cella



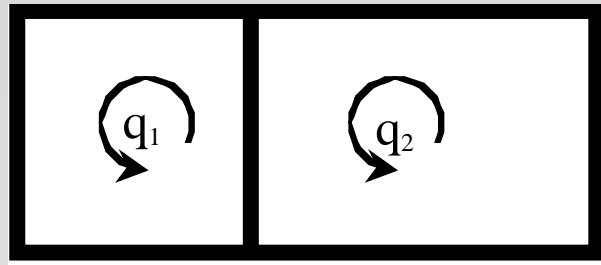
Assumendo l'origine dell'ascissa s in 0. muovendosi in direzione antioraria, q_2 è costante; giunti in 2 dove il setto verticale separa la cella 1 dalla 2, il flusso nel setto con il verso di figura risulta: .

$$q_{1,2} = q_1 - q_2,$$

Da cui si calcola $q_{1,2}$ note q_1, q_2 quindi il numero di incognite linearmente indipendente è *due pari al numero delle celle*.



La sola equazione di equilibrio alla torsione non è sufficiente a risolvere il problema (problema staticamente indeterminato: bisogna ricorrere alle condizioni di congruenza degli spostamenti angolari delle due celle.).



Torsione

–Equilibrio = 1- equazione

$$M_t = 2[A_1 q_1 + A_2 q_2]$$

–Congruenza=1- equazione

$$\varphi'_1 = \varphi'_2$$

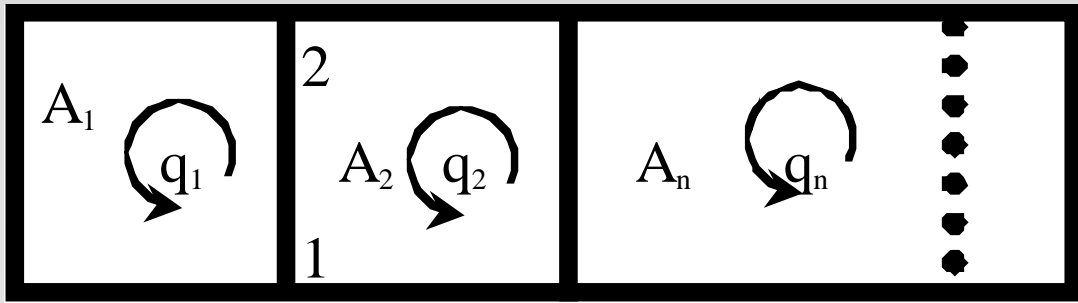
$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{2A} \oint \frac{q ds}{Gt}$$

$$\left\{ \frac{1}{2A_1} [q_1 l_1 - q_2 l_{1,2}] = \frac{1}{2A_2} [q_2 l_2 - q_1 l_{1,2}] \right.$$

Sistema di due equazioni nelle due incognite q_1, q_2 .

Determinate q_1, q_2 si calcola la rotazione della sezione.

3b. Sezioni Chiuse Multi-cellulari



$$q_{n-1,n} = q_{n-1} - q_n$$

–Equilibrio = 1 equazione

$$M_t = 2 \sum_{n=1}^N A_n q_n$$

–Congruenza = N-1 equazioni

$$\varphi'_1 = \varphi'_2 = \dots \varphi'_n = \dots \varphi'_N$$

$$\frac{d\varphi_n}{dx} = \frac{1}{2A_n} [q_n l_n - q_{n-1} l_{n-1,n} - q_{n+1} l_{n,n+1}]$$

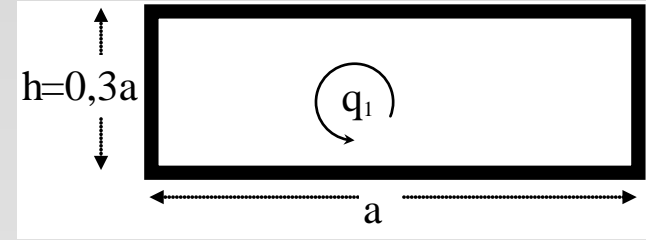
Sistema di N equazioni nelle N incognite q_1, q_2, \dots, q_N .

Determinate le q_1, q_2, \dots, q_N si calcola la rotazione della sezione.

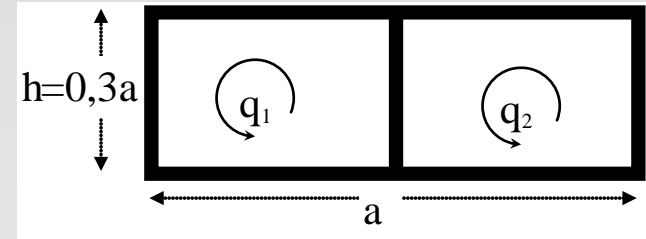
Effetto dei setti sulla rigidezza torsionale

$$\frac{4A^2}{\sum_n L_n} \leq B < 4 \sum_n \frac{A_n^2}{L_n}$$

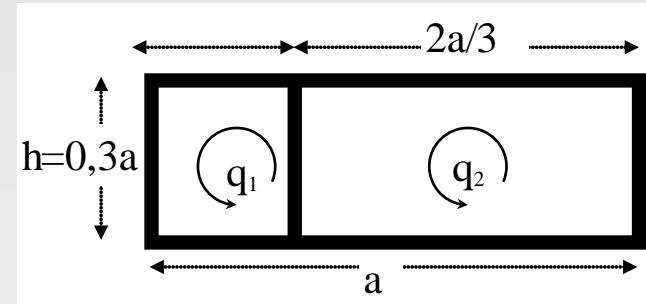
B_0



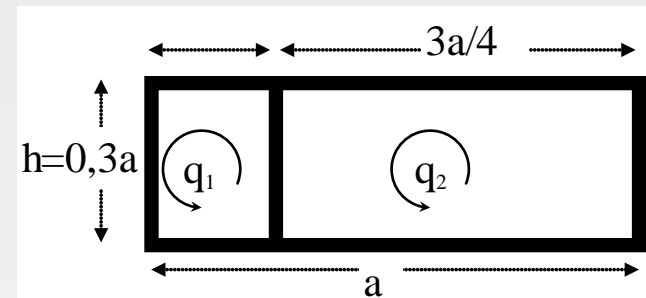
$B/B_0=1$



$B/B_0=1,006$



$B/B_0=1,016$



Effetto dei setti sulla rigidezza torsionale

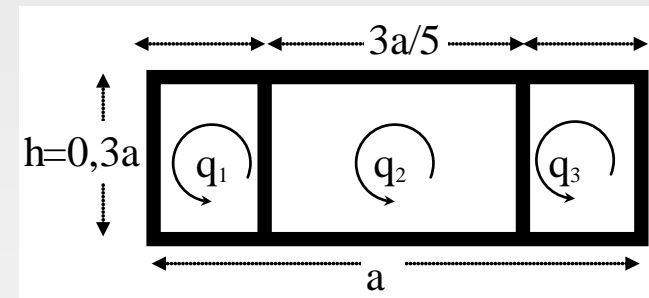
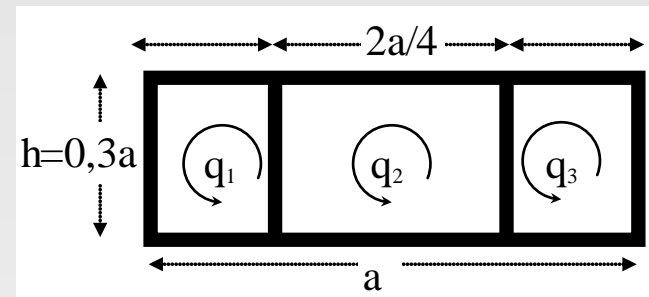
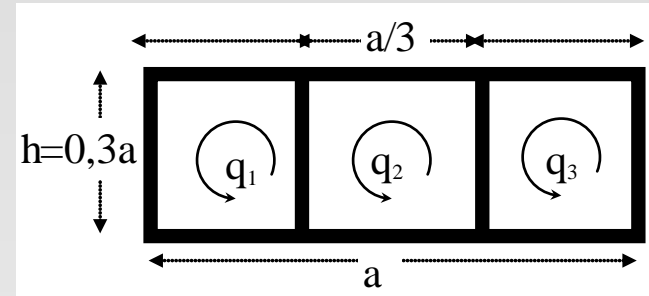
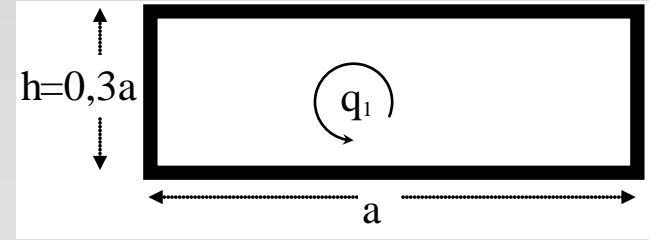
$$\frac{4A^2}{\sum_n L_n} \leq B < 4 \sum_n \frac{A_n^2}{L_n}$$

B_0

$B/B_0=1,03$

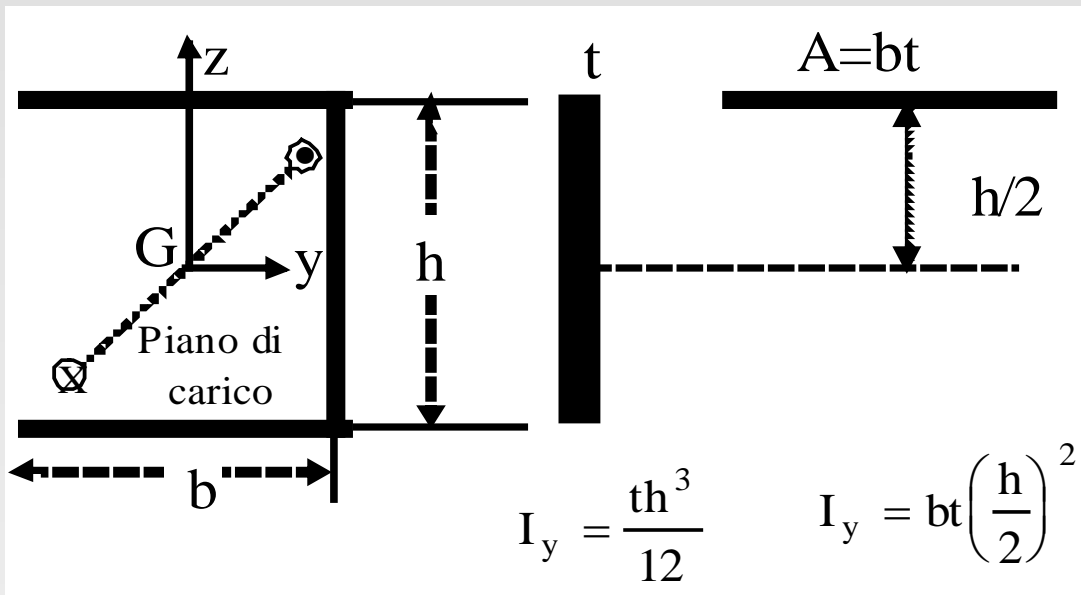
$B/B_0=1,056$

$B/B_0=1,077$



Flessione (pura)

$$\sigma_{xx} = \frac{\hat{M}_y}{I_y} z + \frac{\hat{M}_z}{I_z} y$$

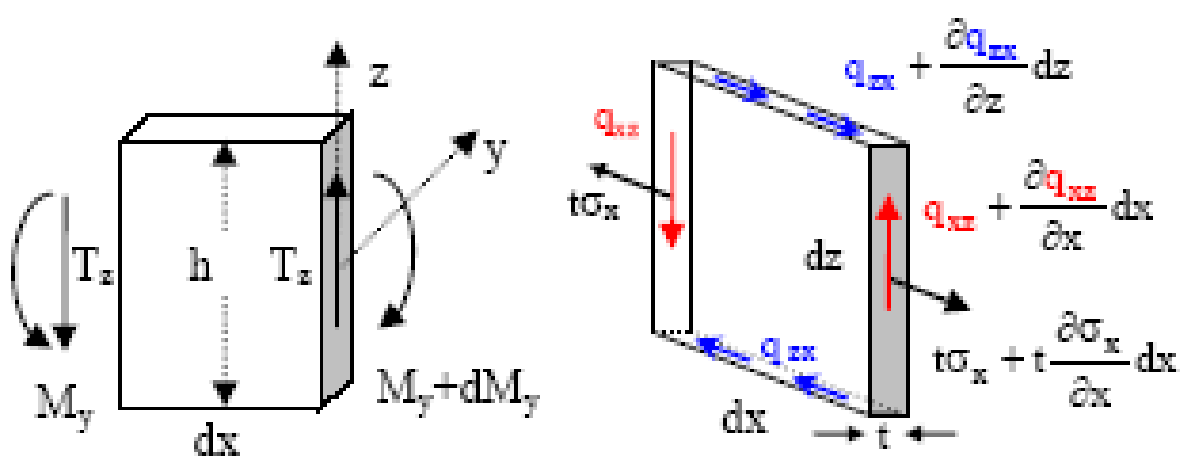


$$I_y = \frac{th^3}{12} + 2 * \left[\frac{bt^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bt \right] =$$
$$= \frac{th^3}{12} + \frac{bh^2t}{2} + 0(t^3)$$

Taglio (+ flessione)

- a)–*Torsione*, dovuta al momento torcente M_t di trasporto dal reale punto di applicazione della forza \mathbf{T} al centro di taglio della sezione; le tensioni conseguenti sono gli sforzi τ^M nel piano della sezione.
- b)–*Flessione*, dovuta al momento flettente proporzionale all'intensità della forza per la distanza di applicazione della stessa dalla sezione in esame; le tensioni conseguenti sono gli sforzi σ , normali al piano della sezione.
- c)–*Taglio*, dovuto alla forza \mathbf{T} applicata nel centro di taglio della sezione; le tensioni conseguenti sono gli sforzi τ^T nel piano della sezione.

Taglio (+ flessione): parete dritta



Equilibrio in direzione x

$$\frac{\partial q_{zx}}{\partial z} = -t \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{dq_{zx}(z)}{dz} = -t \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$$

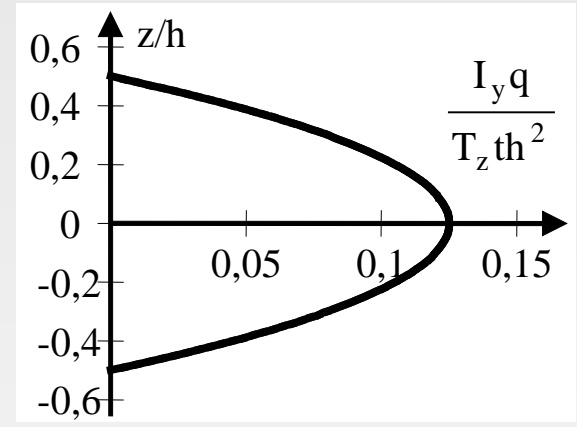
$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\frac{dq_{zx}}{dz} = -\frac{1}{I_y} t \frac{\partial M_y}{\partial x} z \Rightarrow \frac{dq_{zx}}{dz} = -\frac{T_z}{I_y} tz$$

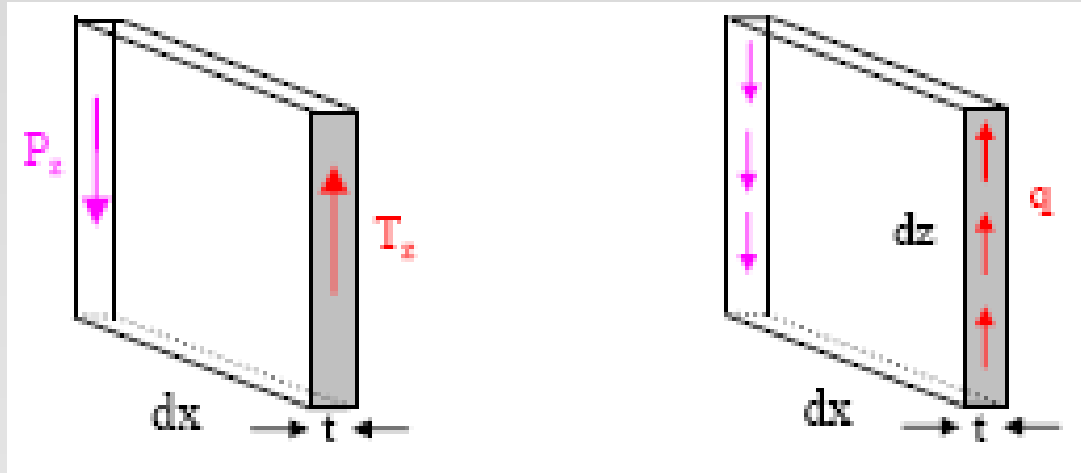
$$q_{zx} = q_0 - \frac{T_z}{I_y} \int_{-h/2}^z z(t dz) = -\frac{T_z t}{8I_y} (4z^2 - h^2)$$

Per il principio di reciprocità, $q_{xz} = q_{zx}$:

$$q(z) = q_{xz} = q_0 - \frac{T_z}{I_y} \int_{-h/2}^z z(t dz) = -\frac{T_z t}{8I_y} (4z^2 - h^2)$$



Verso di q



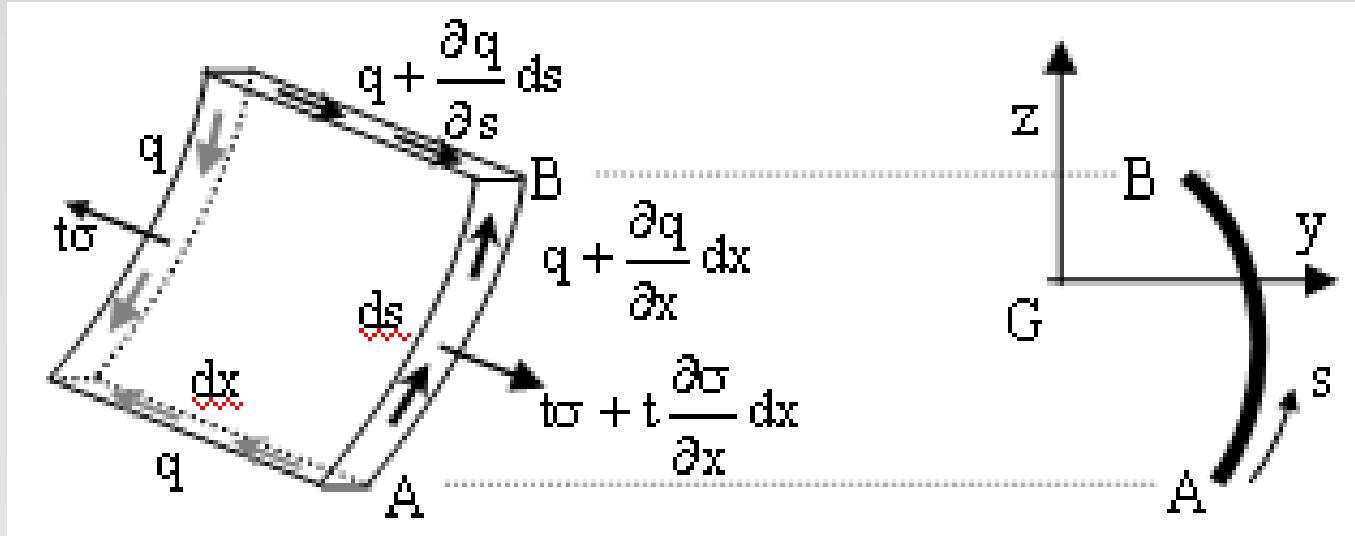
Verifica (equivalenza o equilibrio)

$$R_z = \int_{-h/2}^{h/2} q(z) dz = -\frac{T_z t}{4I_y} \int_{-h/2}^{h/2} \left(2z^2 - \frac{h^2}{2}\right) dz = \frac{T_z}{I_y} \frac{th^3}{12} \equiv T_z$$

$$T_z - P_z = 0$$

La risultante sulla sezione (faccia positiva) del flusso di taglio è equivalente alla forza tagliante applicata sulla sezione ed è uguale ed opposto alla forza di taglio agente sulla sezione avente faccia negativa.

Taglio (+ flessione): parete curva



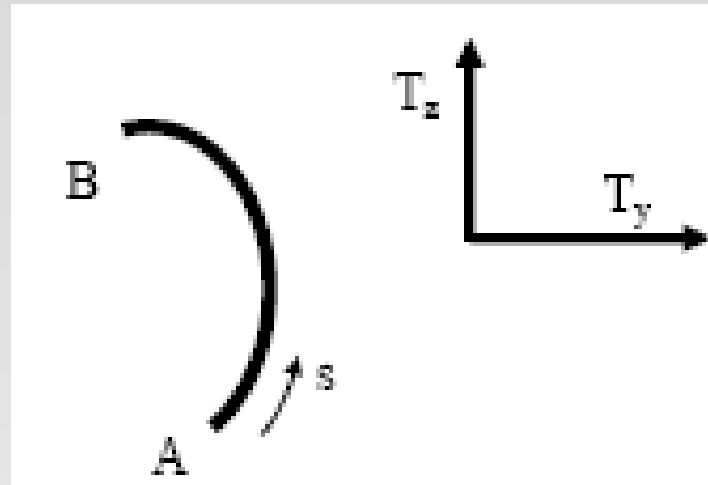
$$\frac{\partial q}{\partial s} = -t \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Rightarrow \frac{dq}{ds} = -t \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\hat{M}_y}{I_y} z + \frac{\hat{M}_z}{I_z} y$$

$$\frac{\partial \hat{M}_y}{\partial x} = \hat{T}_z \quad ; \quad \frac{\partial \hat{M}_z}{\partial x} = \hat{T}_y$$

$$q(s) = q_0 - \frac{\hat{T}_z}{I_y} \int_0^s z(t) ds - \frac{\hat{T}_y}{I_z} \int_0^s y(t) ds = q_0 + q^*(s)$$

Verifica di equivalenza

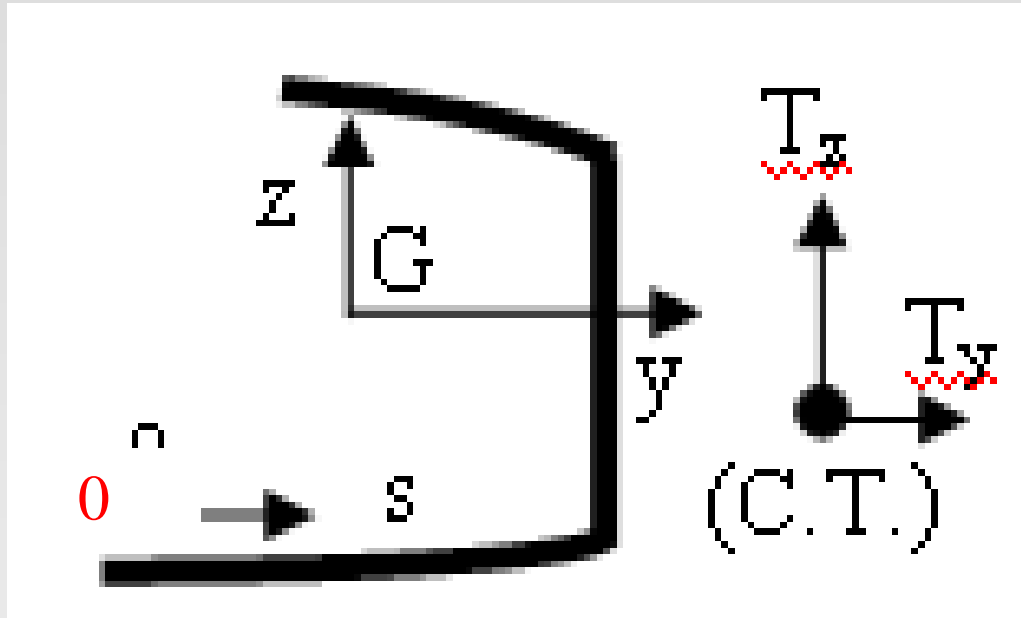


Indicando con q_z e q_y le componenti del flusso secondo gli assi z e y si ha:

$$\int_A^B q_z(s) ds = \int_A^B q(s) \frac{dz}{ds} ds \equiv T_z$$
$$\int_A^B q_y(s) ds = \int_A^B q(s) \frac{dy}{ds} ds \equiv T_y$$

Taglio: sezioni aperte

T nel **Centro di Taglio** (C.T.) supposto noto



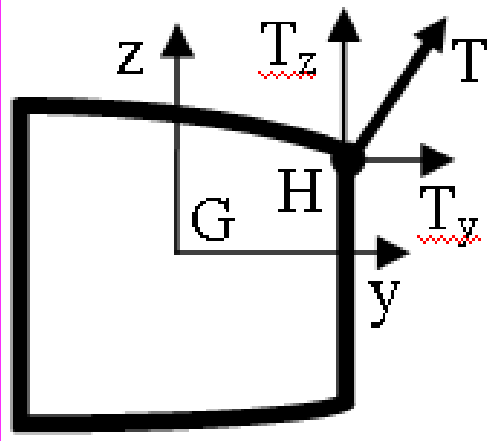
Ipotesi necessaria
poiche' le sezioni
aperte hanno scarsa
rigidezza torsionale

All'estremo di una sezione aperta il flusso di taglio $=0$ dunque se prendo l'origine in $s=0$ si ha la costante $q_0 = 0$

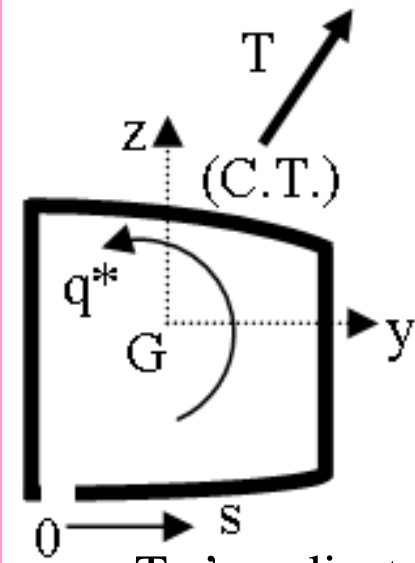
$$q(s) = q_0 - \frac{\hat{T}_z}{I_y} \int_0^s z(t) ds - \frac{\hat{T}_y}{I_z} \int_0^s y(t) ds = 0 + q^*(s)$$

Taglio sez. chiuse 1-cella: **M. diretto**

$$q(s) = q_0 + q^*(s)$$



1)-"taglio"

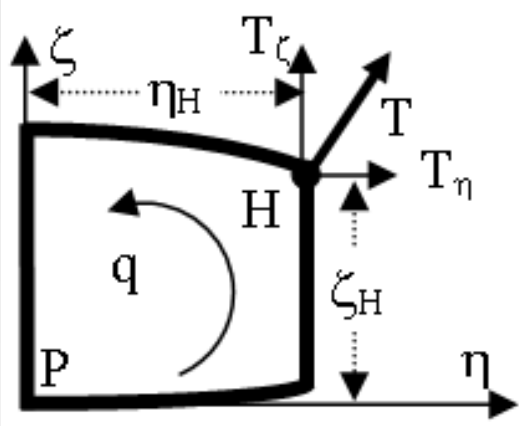


e calcolo

$$q^*(s) = -\frac{\hat{T}_z}{I_y} \int_0^s z(t) ds - \frac{\hat{T}_y}{I_z} \int_0^s y(t) ds$$

Soluzione vera se T e' applicata nel C.T della sezione aperta che comunque e' diverso da H

2)-il valore q_0 deve essere tale da soddisfare l'equilibrio alla torsione, ovvero



scegliendo come polo il punto P i momenti esterni devono essere uguali a quelli interni:

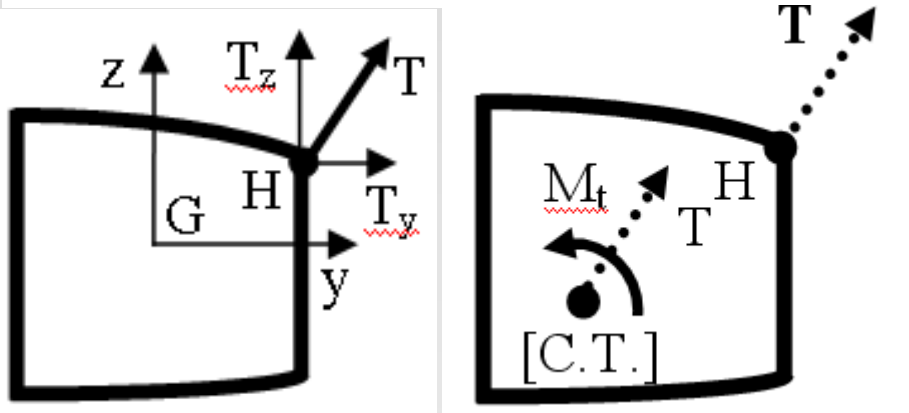
$$T_\zeta \eta_H - T_\eta \zeta_H = \oint q^* p^{(P)} ds + 2Aq_0$$

$$\oint q^* p^{(H)} ds + 2Aq_0 = 0 \Rightarrow q_0 = -\frac{1}{2A} \oint q^* p^{(H)} ds$$

Taglio sez. chiuse 1-cella: **M. [C.T.]**

T applicato in **H** \equiv

T nel [C.T.] + un momento torcente M_t :



-per calcolo di $q^{[CT]}$ dovuto a **T** nel [C.T.]
come nel metodo diretto.

$$1) q^*(s) = -\frac{T_z}{I_y} \int_0^s z(t) ds - \frac{\hat{T}_y}{I_z} \int_0^s y(t) ds$$

$$2) \oint q^* p^{[C.T.]} ds + 2A \bar{q}_0 = 0$$

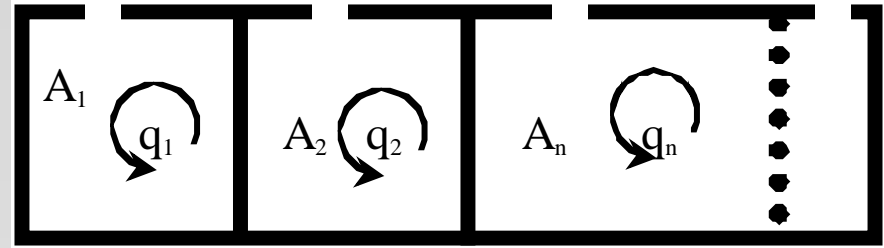
$$q^{[CT]} = q^* + \bar{q}_0$$

-per calcolo di q^M dovuto a M_t

$$q^{M_t} = \frac{M_t}{2A}$$

$$q = q^* + (\bar{q}_0 + q^{M_t}) = q^* + q_0$$

Taglio sez. chiuse Multi-celle



Metodo diretto.

a)-Calcolo q^* : ipotetico taglio in ogni cella dove origina l'ascissa s : \Rightarrow

$$q_n^*(s) = -\frac{\hat{T}_z}{I_y} \int_0^s z(t) ds - \frac{\hat{T}_y}{I_z} \int_0^s y(t) ds$$

b)-Calcolo $q_{0,n}$:

b1)-equilibrio dei momenti. Se il polo P è il punto di applicazione della T: \Rightarrow

Momento totale

$$\sum_{n=1}^N \oint_n q_n^*(s) p^{(P)} ds + 2 \sum_{n=1}^N q_{0,n} A_n = 0$$

b2)-congruenza: (rot. relativa) $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_n = \dots = \phi_{N-1} = \phi_N$

b1)+b2) N relazioni nelle N costanti incognite $q_{0,n}$

Metodo del [C.T.] (supposto noto)

T applicato in P \equiv T nel [C.T.] + un momento torcente M_t :

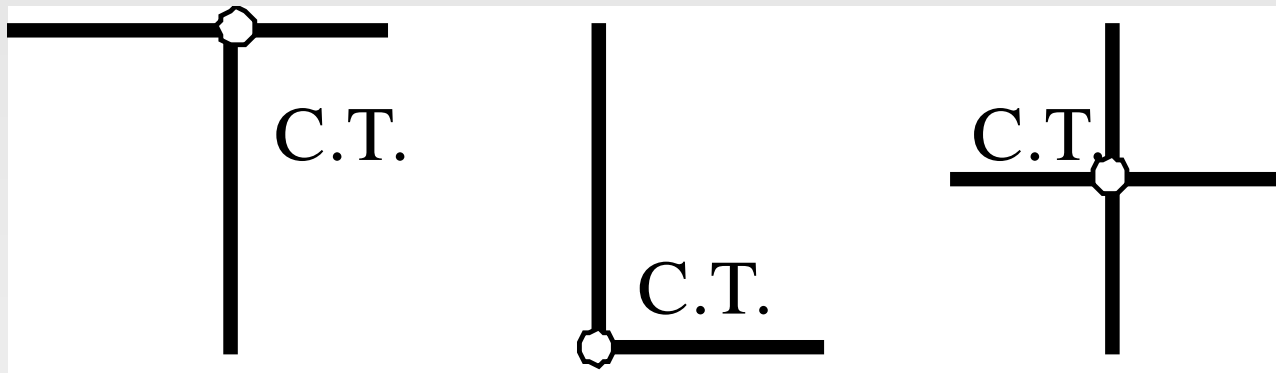
-per calcolo di $q^{[CT]}$ dovuto a T nel [C.T.] come sopra a),b);

-per calcolo di q^M dovuto a M_t : si rimanda alla torsione di multi-cella

Determinazione del C.T.

In alcuni casi l'individuazione del C.T. è alquanto semplice.

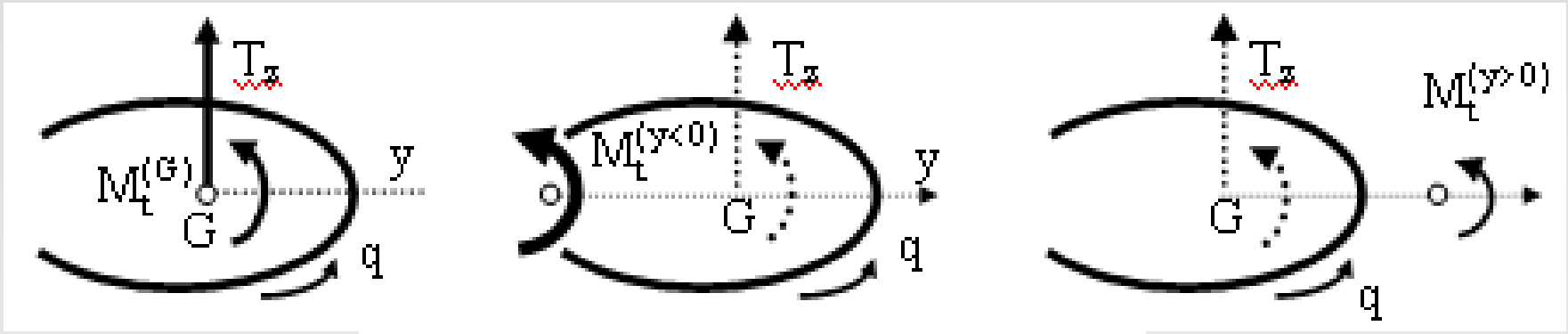
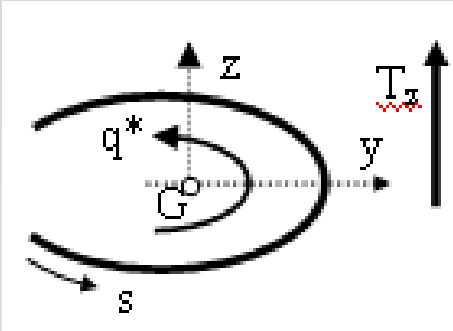
- se la sezione ha un asse di simmetria, il C.T. giace su tale asse;
- se gli assi di simmetria sono due il C.T. è dato dalla loro intersezione che coincide ovviamente con il baricentro.
- per sezioni di figura è l'intersezione delle pareti poiché rispetto ad essa è nullo il momento generato dal flusso di taglio.



Determinazione (C.T) , (sez aperte).

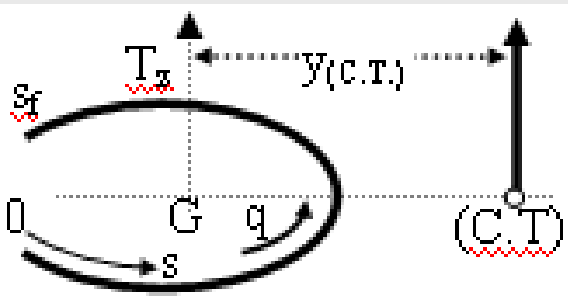
- Sezione con asse di simmetria

Applico una forza ortogonale all'asse di simmetria e trovo il flusso.
In generale questo ha una risultante = T_z e un momento torcente M



Se vario il punto il momento varia

$$M_t^{(y)} = M_t^{(G)} - T_z y = \int_0^{s_f} q(s) p^{(G)} ds - T_z y$$

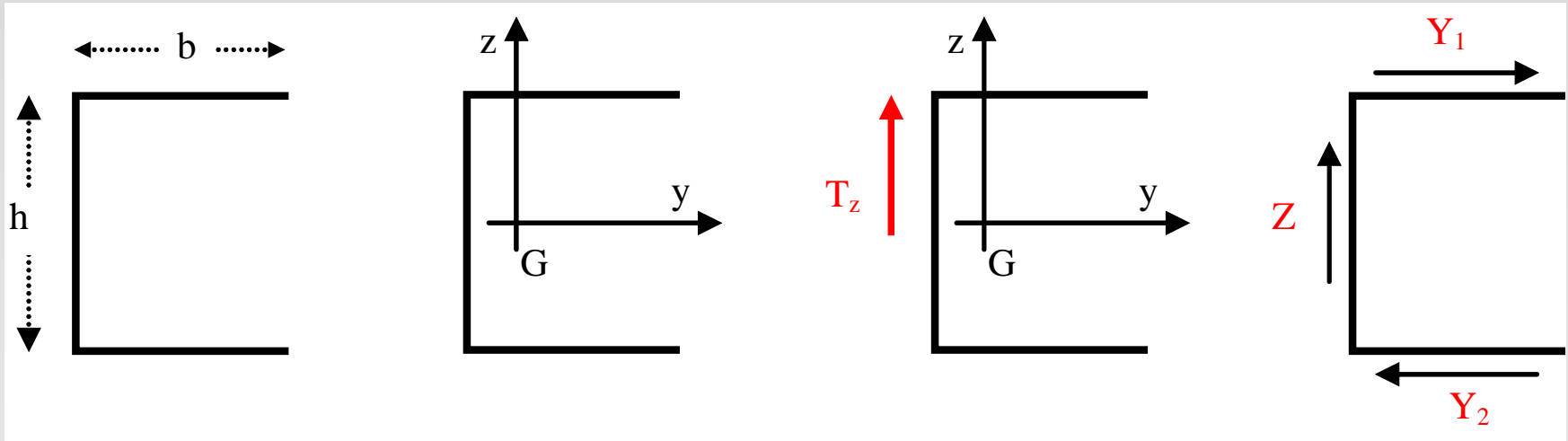


Se $y > 0$ esiste una posizione dove $M=0$

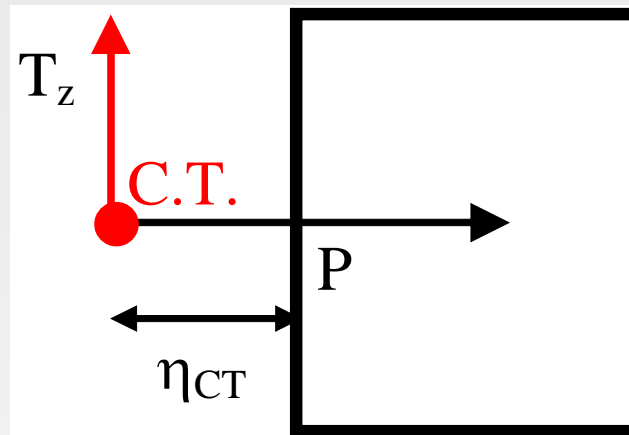
$$\begin{cases} \int_0^{s_f} q(s) p^{(G)} ds - T_z y_{(C.T.)} = 0 & M=0 \\ q(s) = -\frac{T_z}{I_y} \int_0^s z(t) ds = -\frac{T_z}{I_y} Q_y \end{cases} \Rightarrow -\frac{T_z}{I_y} \int_0^{s_f} Q_y p^{(G)} ds - T_z y_{(C.T.)} = 0$$

$y_{C.T.}$ (in ambito elastico) non dipende dall'intensità di T ma è una proprietà della sezione.

Esempio: ricerca del (C.T.)



$$M = (Y_1 + Y_2)h / 2 + \eta_{CT}Z = 0 \Rightarrow \eta_{CT} = -\frac{Y_1 + Y_2}{Z} \frac{h}{2} = f(h, b)$$

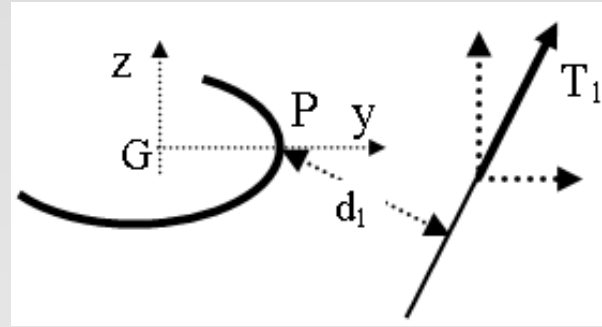
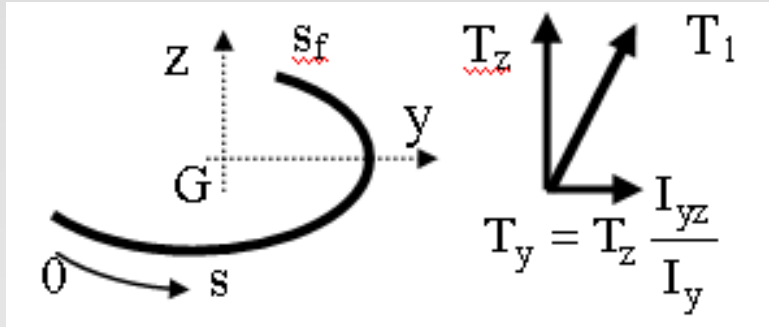


Determinazione (C.T) , (sez aperte).

- Sezione senza asse di simmetria

a) T_1 con le componenti di figura:

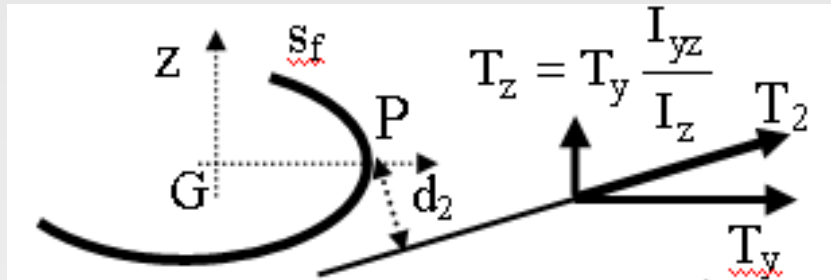
$$\hat{T}_z = T_z \quad ; \quad \hat{T}_y = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = -\frac{T_z}{I_y} Q_y(s)$$



$$M_{q_1}^{(P)} = M_{T_1}^{(P)} \Rightarrow \int_0^s q_1 p^{(P)} ds = d_1 T_1$$

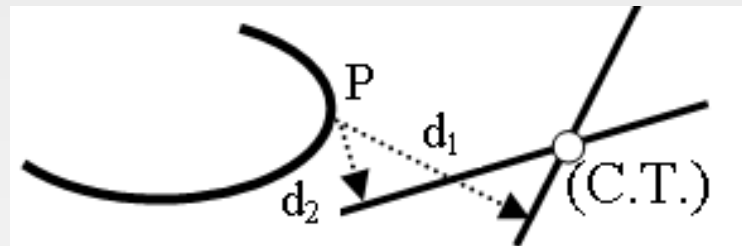
b) T_2 con le componenti di figura:

$$\hat{T}_y = T_y \quad ; \quad \hat{T}_z = 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 = -\frac{T_y}{I_z} Q_z(s)$$



$$M_{q_2}^{(P)} = M_{T_2}^{(P)} \Rightarrow \int_0^s q_2 p^{(P)} ds = d_2 T_2$$

Il (C.T.) è l'intersezione delle due linee



Determinazione [C.T.] 1-cella [sez chiuse].

Sezione con asse di simmetria

Si applica una forza T ortogonale all'asse di simmetria:

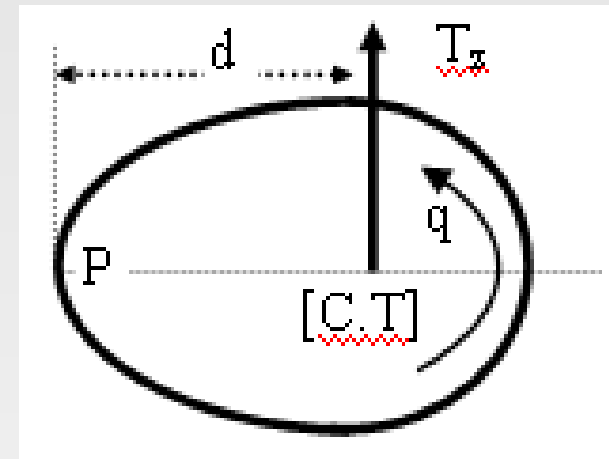
1. si calcola q^* ;
2. si calcola il flusso costante q_Φ tale che sia nulla la rotazione Φ .

In questo modo il flusso $q=q^*+q_\Phi$ è quello corrispondente alla T applicata nel [C.T.] la cui posizione è incognita.

3. si calcola la posizione del [C.T.] imponendo:

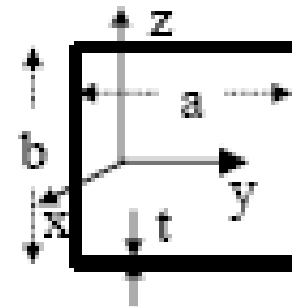
$$T_z d_{[C.T.]} - \int_0^{s_f} q(s) p^{(P)} ds = 0$$

$$d_{[C.T.]} = \frac{1}{T_z} \int_0^{s_f} q(s) p^{(P)} ds$$



Riepilogo

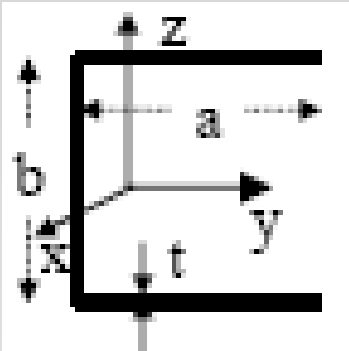
a)–Sia data la sezione aperta di figura in parete sottile. Senza entrare nel merito dei moduli elastici del materiale e delle grandezze geometriche della sezione, quali sollecitazioni sono consentite e quali da evitare? Si giustifichino i motivi per cui alcune sollecitazioni sono consentite ed altre no, precisando le tensioni conseguenti.



Trazione ?

SI

–*La sollecitazione di trazione, dovuta ad un carico assiale che agisce su un piano ortogonale al piano della sezione; infatti la trazione induce sforzi σ_x normali al piano della sezione e costanti sulla sezione, a cui le pareti (con caratteristiche meccaniche e geometriche opportunamente dimensionate) sono in grado di reagire.*



Flessione ?

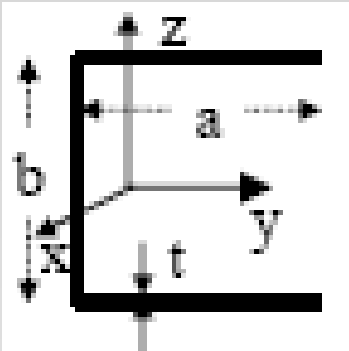
SI

–La sollecitazione di flessione, dovuta ad un momento flettente M_f che agisce su un piano ortogonale al piano della sezione; infatti la flessione induce sforzi σ_x , normali al piano della sezione e di intensità che varia linearmente con y e z , a cui le pareti (con caratteristiche meccaniche e geometriche opportunamente dimensionate) sono in grado di reagire.

Torsione ?

NO

–La sollecitazione di torsione, dovuta ad un momento torcente M_t nel piano della sezione; infatti la rigidità torsionale di sezioni aperte è proporzionale al cubo dello spessore, quindi estremamente piccola data l'ipotesi di piccolo spessore, con conseguenti elevati sforzi di taglio.



Taglio ?

SI e NO

SI

–La sollecitazione di taglio, dovuta ad una forza di taglio T nel piano della sezione, solo se applicata nel Centro di Taglio¹; infatti solo in questo caso sulla sezione non interviene anche la sollecitazione di torsione che, come appresso precisato, è da evitare. La tensione sulle pareti, conseguente ad una T nel C.T., è un flusso di taglio q (prodotto dello sforzo di taglio τ per lo spessore: $q = \tau t$) il cui valore è in generale funzione di y, z .

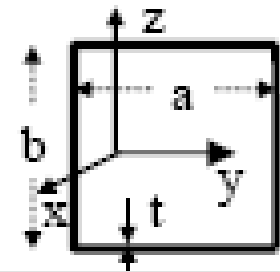
NO

–La sollecitazione di taglio, dovuta ad una forza di taglio T nel piano della sezione, se applicata in un punto diverso dal Centro di Taglio; infatti in questo caso interviene anche la sollecitazione di torsione che come detto è da evitare.

Riepilogo

b)–Sia data la sezione chiusa di figura in parete sottile. Senza entrare nel merito dei moduli elastici del materiale e delle grandezze geometriche della sezione, quali sollecitazioni sono consentite e quali da evitare?

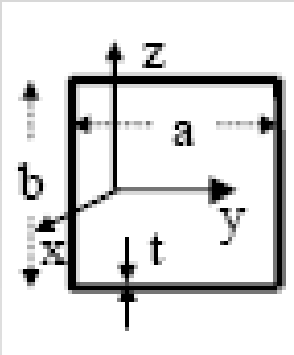
Si giustifichino i motivi per cui alcune sollecitazioni sono consentite ed altre no, precisando le tensioni conseguenti.



Trazione ?

SI

–*La sollecitazione di trazione, dovuta ad un carico assiale che agisce su un piano ortogonale al piano della sezione; infatti la trazione induce sforzi σ_x normali al piano della sezione e costanti sulla sezione, a cui le pareti (con caratteristiche meccaniche e geometriche opportunamente dimensionate) sono in grado di reagire.*



Flessione ?

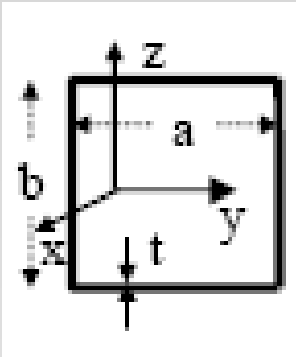
SI

–La sollecitazione di flessione, dovuta ad un momento flettente M_f che agisce su un piano ortogonale al piano della sezione; infatti la flessione induce sforzi σ_x , normali al piano della sezione e di intensità che varia linearmente con y e z , a cui le pareti (con caratteristiche meccaniche e geometriche opportunamente dimensionate) sono in grado di reagire.

Torsione ?

SI

–La sollecitazione di torsione, dovuta ad un momento torcente M_t agente nel piano della sezione; infatti la rigidità torsionale di sezioni chiuse è proporzionale all'area della sezione. La tensione sulle pareti, conseguente ad M_t , è un flusso di taglio $q^M = \tau^M t$, il cui valore è costante lungo le pareti ed al quale le pareti (con caratteristiche meccaniche e geometriche ed area opportunamente dimensionate) sono in grado di reagire.



Taglio ?

SI

–La sollecitazione di taglio, dovuta ad una forza di taglio T nel piano della sezione, applicata in qualsiasi punto del piano della sezione; infatti se sulla sezione intervenisse anche la sollecitazione di torsione questa, come prima precisato, è consentita. La tensione sulle pareti è un flusso di taglio $q = \tau t$, somma di un flusso di taglio q^T , dovuto alla forza tagliante applicata nel C.T., il cui valore varia lungo le pareti e di un eventuale flusso di taglio q^M , dovuto alla sollecitazione di torsione, il cui valore è costante lungo le pareti.

Si consideri un tratto L di fusoliera, a sezione circolare di raggio R e di spessore sottile t . Considerato impedito qualsiasi atto di moto rigido, la struttura è soggetta alle seguenti diverse sollecitazioni:

- a)–Momento torcente M_t costante in x ;
- b)–Momento flettente M_y costante in x ;
- c)–Forza T_z in direzione z in $x=0, y=0, z=0$;
- d)–Forza T_z in direzione z in $x=0, y=R, z=0$;
- e)–Un salto di pressione Δp tra l'interno e l'esterno della fusoliera, che si considera ovviamente chiusa agli estremi.

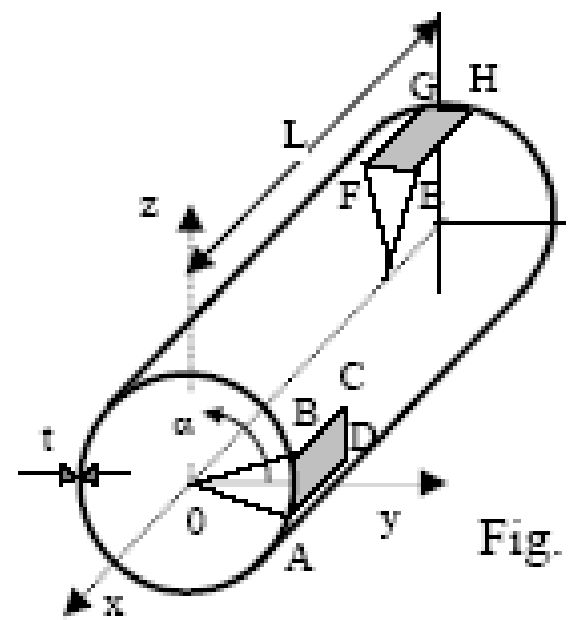
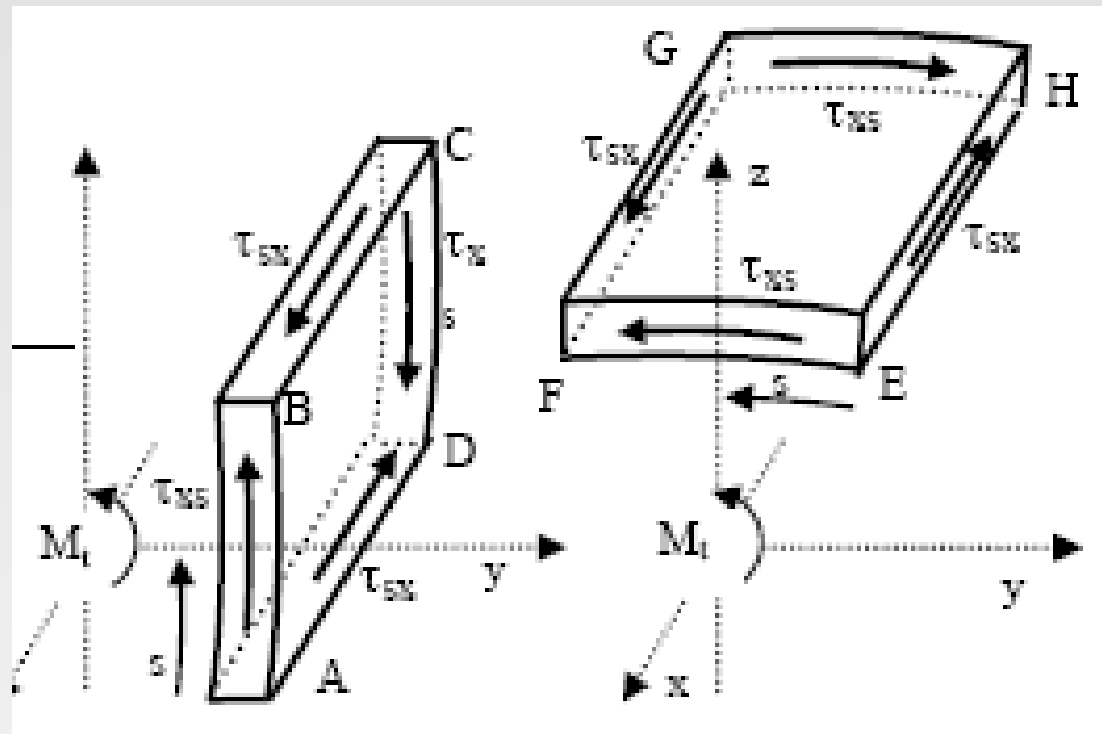
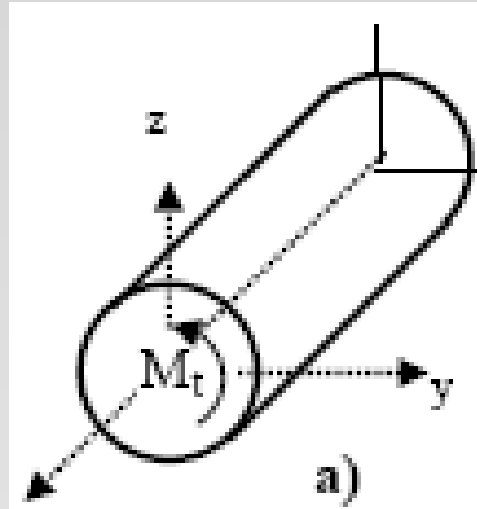
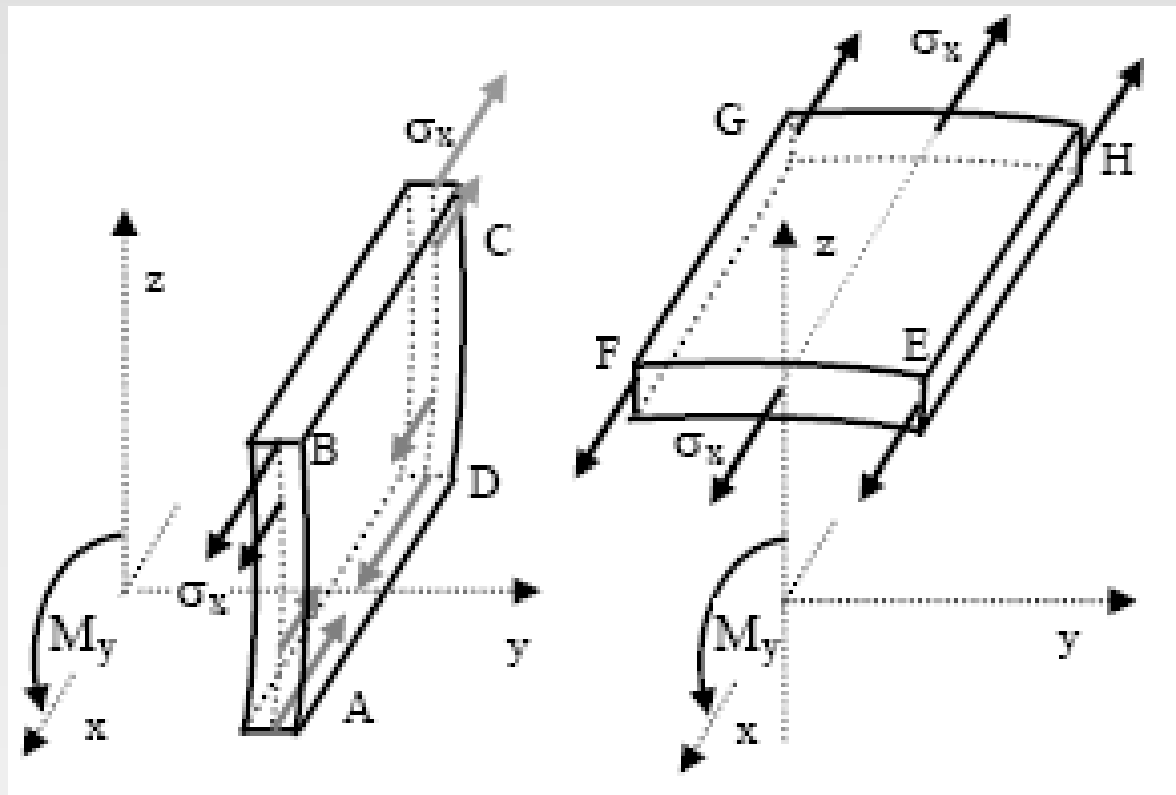
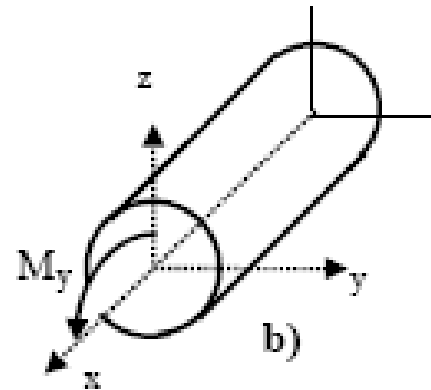


Fig. 1

a)–Momento torcente M_t .



b)–Momento M_y costante in x.



c)–Forza T_z in direzione z in $x=0, y=0, z=0$;

c1)–Elemento ABCD.

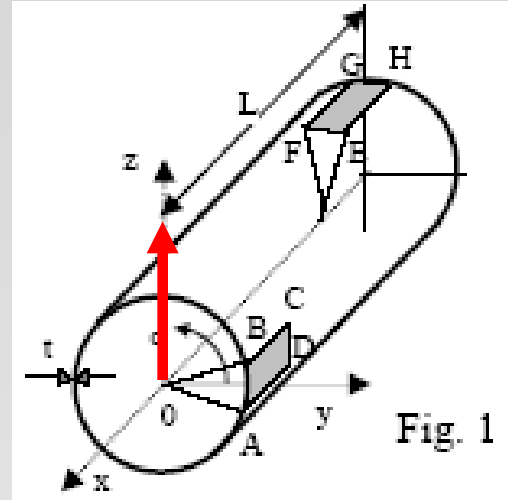
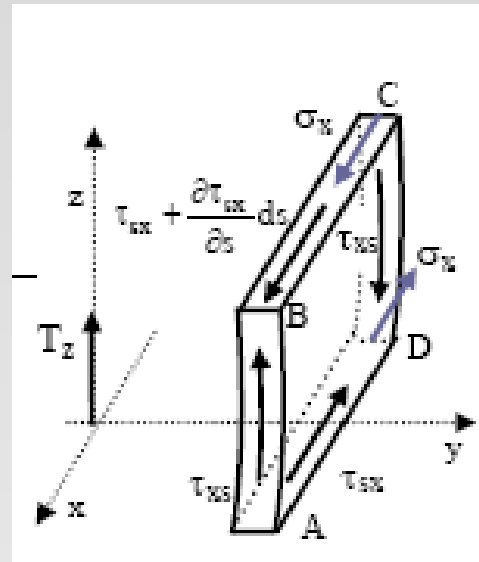
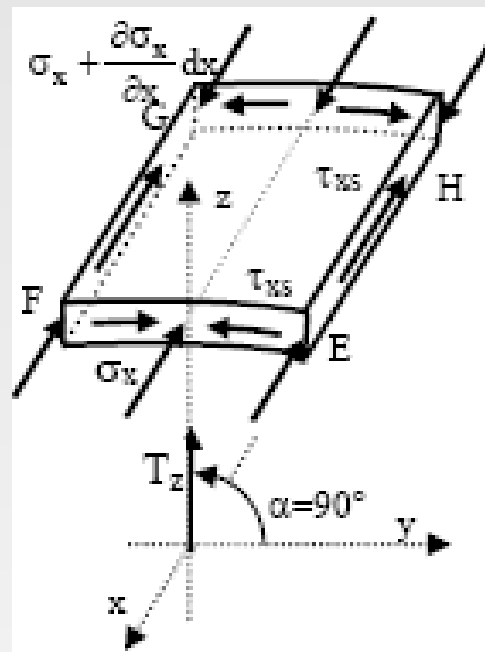


Fig. 1

c2)–Elemento EFGH.



d)–Forza T_z in direzione z in $x=0, y=R, z=0$;

d1)–Elemento ABCD.

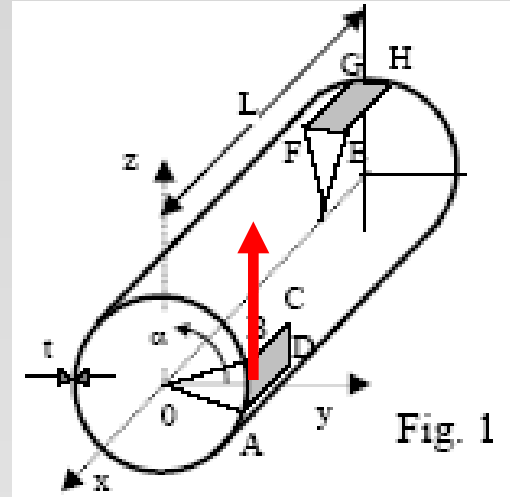
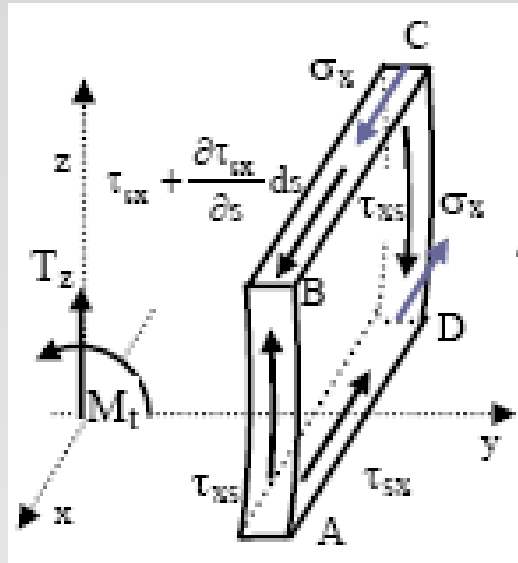
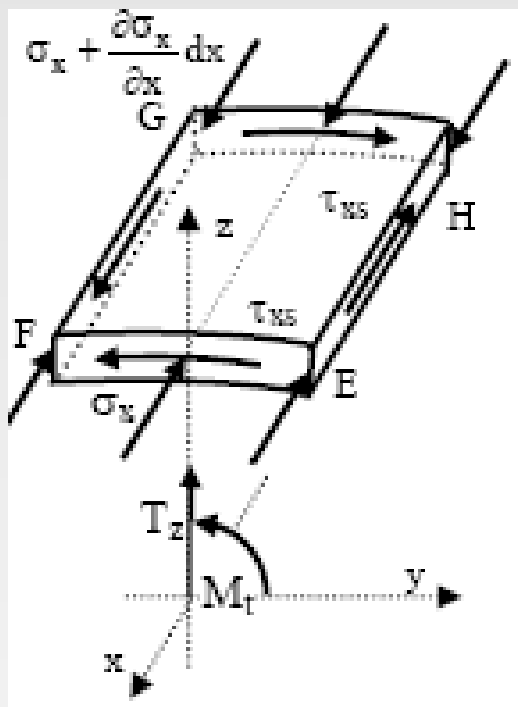
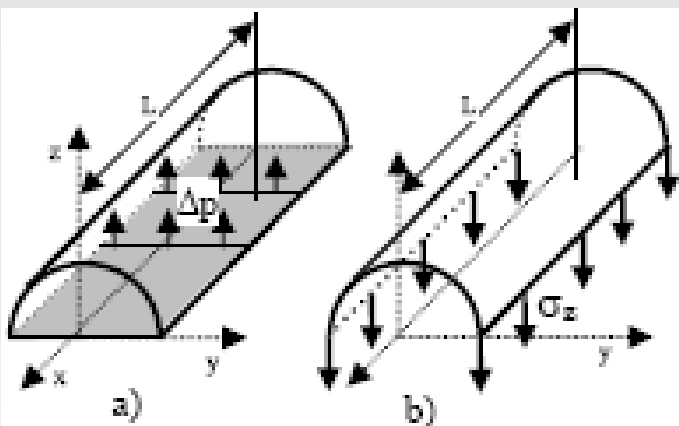
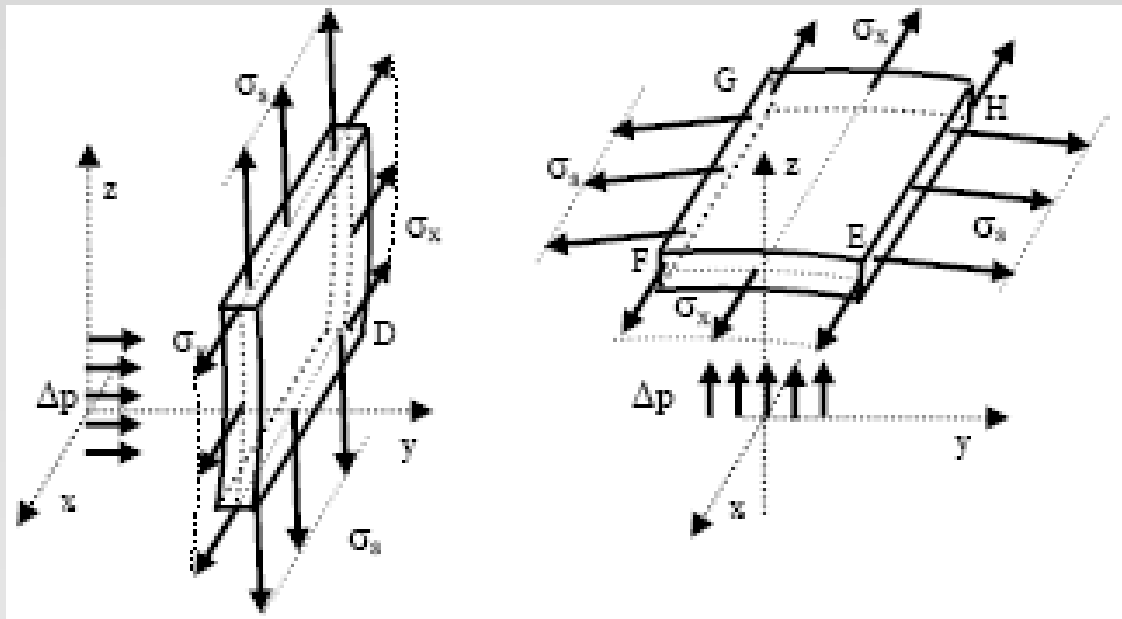


Fig. 1

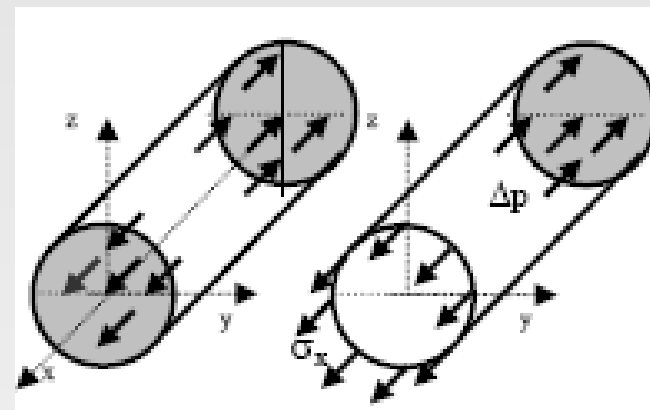
d2)–Elemento EFGH.



e) - Salto di pressione Δp dovuto alla pressurizzazione in quota.

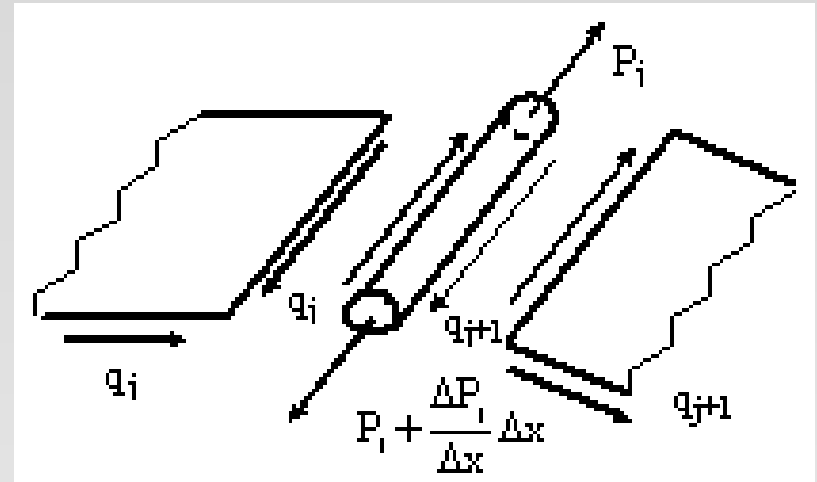
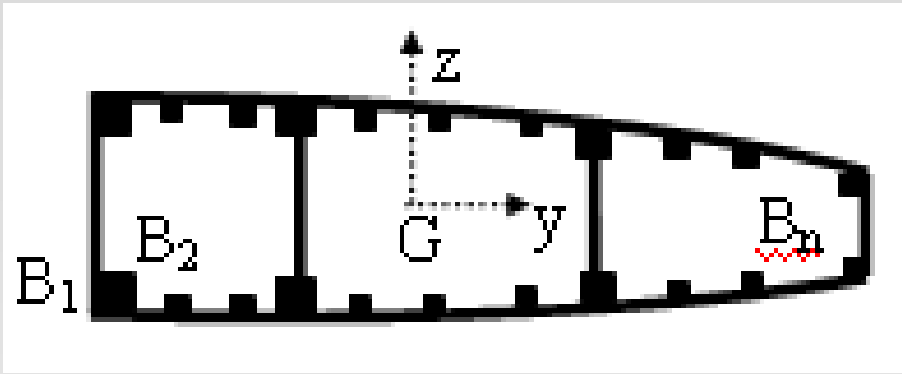


$$2RL\Delta p = 2\sigma_x tL \Rightarrow \sigma_x = \frac{R\Delta p}{t}$$



$$\pi R^2 \Delta p = 2\pi R t \sigma_x \Rightarrow \sigma_x = \frac{R\Delta p}{2t}$$

Effetto dei correnti

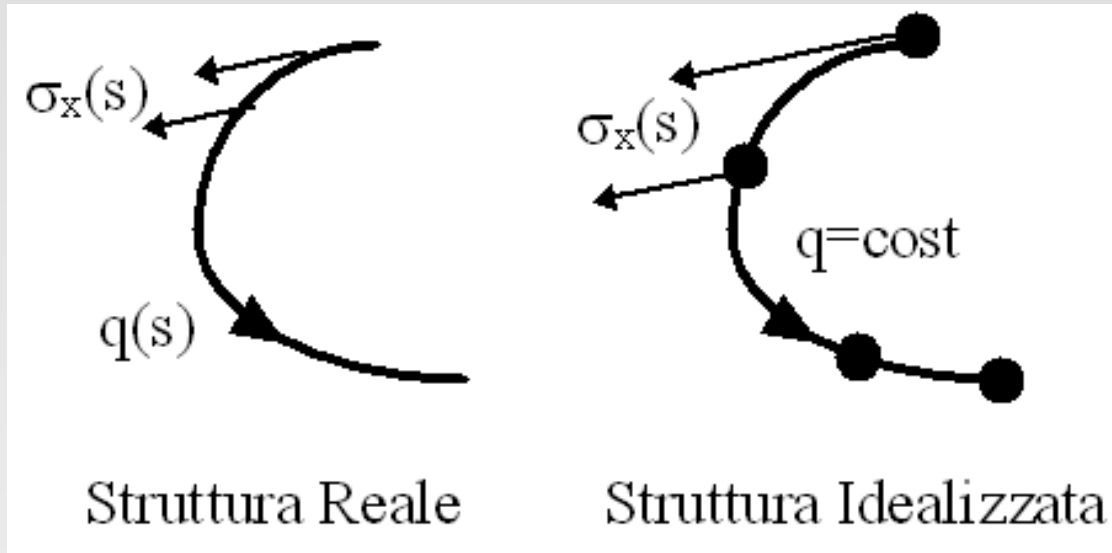


$$q_{j+1} - q_j = -\frac{\Delta P_j}{\Delta x} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} B_j = -\frac{\hat{T}_z}{I_y} z_j B_j - \frac{\hat{T}_y}{I_z} y_j B_j$$

$$q(s) = q_0 - \frac{\hat{T}_z}{I_y} \left[\int_0^s z(t) ds + \sum_{j=1}^s z_j B_j \right] - \frac{\hat{T}_y}{I_z} \left[\int_0^s y(t) ds + \sum_{j=1}^s y_j B_j \right]$$

Idealizzazione

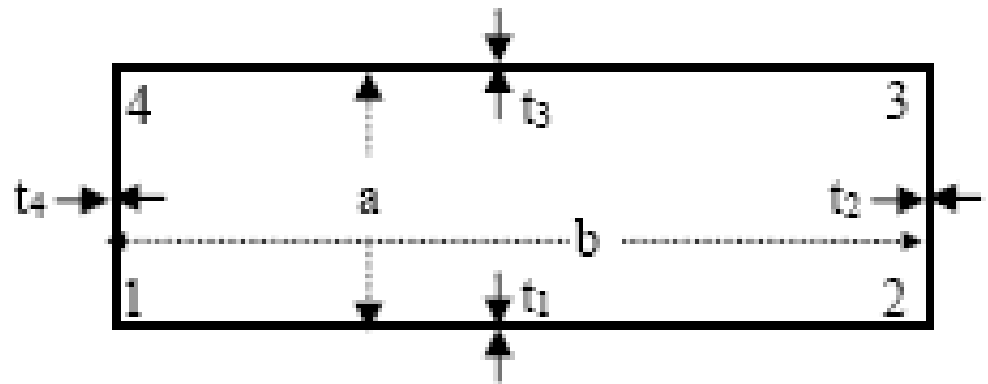
$$q(s) = q_0 - \frac{\hat{T}_z}{I_y} \left[\int_0^s z(t) ds + \sum_{j=1}^s z_j B_j \right] - \frac{\hat{T}_y}{I_z} \left[\int_0^s y(t) ds + \sum_{j=1}^s y_j B_j \right]$$



$$q(s) = q_0 - \frac{\hat{T}_z}{I_y} \sum_{j=1}^s z_j B_j - \frac{\hat{T}_y}{I_z} \sum_{j=1}^s y_j B_j = q_0 + q^*$$

Idealizzazione

Volendo “idealizzare¹⁾” la sezione di figura con un numero più piccolo possibile di irrigidimenti longitudinali, si valuti l’area B_n di detti irrigidimenti.

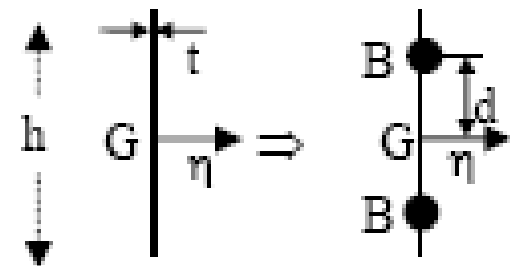


L’idealizzazione della sezione deve essere condotta in modo tale che il nuovo modello dia risultati il più possibile uguali a quello del modello originale. A tal fine occorre che i valori dei parametri, che intervengono nello studio del particolare problema in esame, del modello idealizzato siano il più possibile uguali a quelli del modello originale.

In altri termini il nuovo modello dipende dall’obbiettivo che ci si prefigge ed i valori di B_n potranno risultare diversi a seconda della sollecitazione.

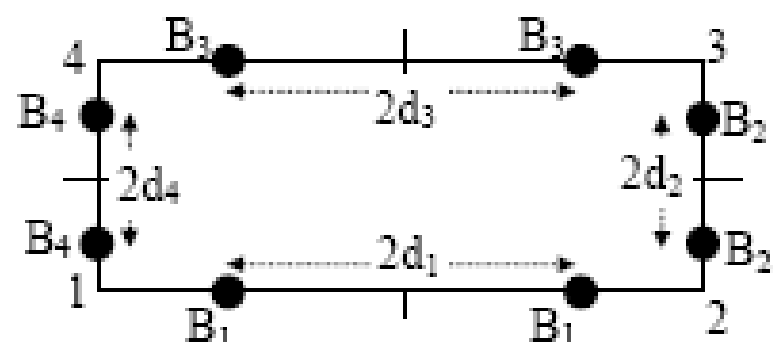
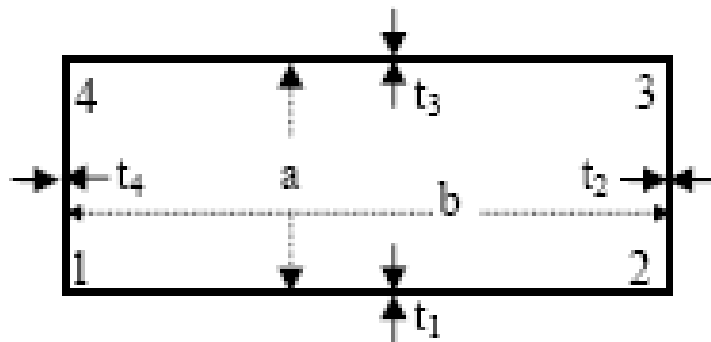
Nel caso generale dello studio delle tensioni, i parametri che intervengono sono la posizione del baricentro, i momenti d'inerzia e le aree dei componenti strutturali e della sezione.

Due è il numero minimo di irrigidimenti per "idealizzare" un tratto di parete con baricentro in G che, per non alterare la posizione originaria del baricentro, vengono presi di stessa area B ed equidistanti da G. L'area B e la posizione dei due irrigidimenti si calcola imponendo l'uguaglianza delle aree e dei momenti.



$$A^{(a)} = ht = A^{(b)} = 2B \Rightarrow B = \frac{ht}{2}$$

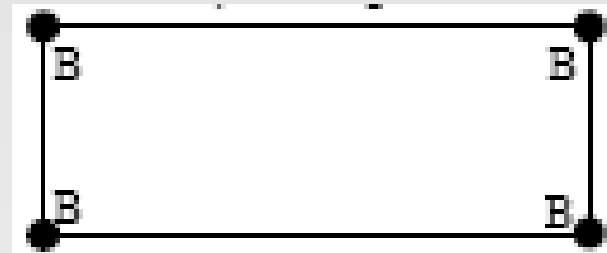
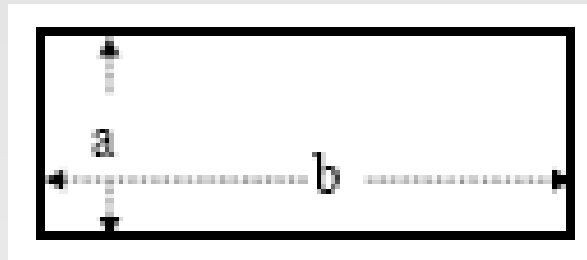
$$I_{\eta}^{(a)} = \frac{1}{12} h^3 t = I_{\eta}^{(b)} = 2Bd^2 = htd^2 \Rightarrow d = \frac{h}{2\sqrt{3}}$$



$$B_1 = \frac{bt_1}{2} ; B_2 = \frac{at_2}{2} ; B_3 = \frac{bt_3}{2} ; B_4 = \frac{at_4}{2}$$

$$d_1 = \frac{b}{2\sqrt{3}} ; d_2 = \frac{a}{2\sqrt{3}} ; d_3 = \frac{b}{2\sqrt{3}} = d_1 ; d_4 = \frac{a}{2\sqrt{3}} = d_2$$

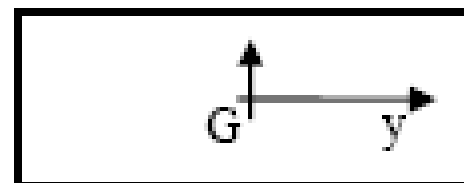
In alcuni casi, il tipo di sollecitazione è tale che solo alcuni dei parametri fisici e geometrici prima considerati intervengono nel calcolo delle tensioni. In questi casi nell'idealizzazione ci si può limitare ad imporre l'uguaglianza dei soli parametri in gioco, come nei seguenti casi per i quali si assume $t_1=t_2=t_3=t_4$ e si indica come modello a) quello originario e come modello b) quello "idealizzato" con quattro irrigidimenti ai vertici della sezione:



b)–Nella sollecitazione di flessione intorno ad un asse di simmetria, quale l'asse y , i parametri significativi sono la posizione del baricentro ed il momento d'inerzia I_y , per cui i due modelli devono avere lo stesso momento d'inerzia rispetto all'asse (principale d'inerzia) y .

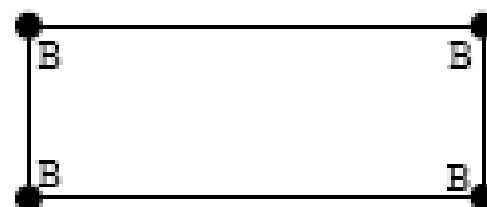
b1)–momento d'inerzia rispetto all'asse y del modello a):

$$(14) \quad I_y^{(a)} = \frac{(a + 3b)a^2 t}{6}$$



b2)–momento d'inerzia rispetto all'asse y del modello b). Le condizioni di simmetria rispetto ad y e la posizione del baricentro su tale asse del modello a) sono rispettate se si assume $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = B$ per cui:

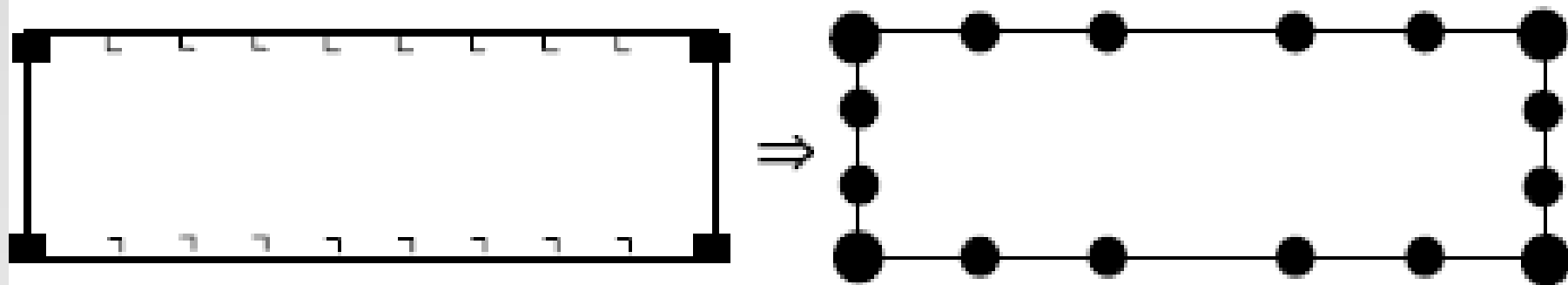
$$(15) \quad I_y^{(b)} = 4B\left(\frac{a}{2}\right)^2 = Ba^2$$



Imponendo l'uguaglianza della (14) con la (15):

$$(16) \quad I_y^{(a)} = I_y^{(b)} \Rightarrow \frac{(a + 3b)a^2 t}{6} = Ba^2 \Rightarrow B = \frac{(a + 3b)}{6} t$$

Nota 3. Nella realtà, spesso nel cassone alare sono fisicamente presenti numerosi irrigidimenti longitudinali e lo studio può essere semplificato, non solo assumendo le pareti inefficienti a flessione, ma riducendo il numero degli iniziali irrigidimenti come mostrato in figura.



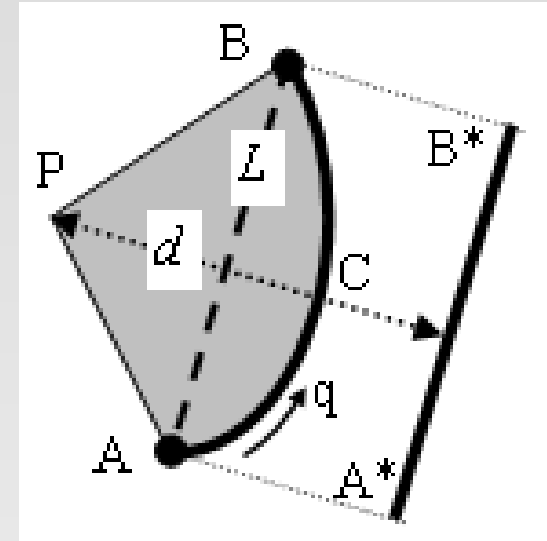
Così come può risultare conveniente idealizzare una struttura monocoque in una struttura semi-monocoque “idealizzata”.

Studiare il modello “idealizzato” in luogo del modello originario:

- non comporta sostanziali vantaggi nello studio della trazione e della flessione;
- comporta sensibili vantaggi nello studio della sollecitazione di taglio;

Equivalenza pareti curve e dritte (se $q = \text{cost}$)

$$|R|d = 2qA^{(P)} \quad \text{quindi} \quad d = \frac{2qA^{(P)}}{|R|} = \frac{2qA^{(P)}}{qL} = \frac{2A^{(P)}}{L}$$



Un generico pannello curvo ACB può essere pensato come un “pannello dritto” A*B* sul quale si trova il (C.T.) del tratto ACB.

Ne consegue che l'applicazione di una forza lungo la retta distante d da P non induce rotazione della sezione.

Sezioni staticamente determinate

Le formule ricavate nei vari casi di sollecitazione derivano dall'aver sempre soddisfatto le equazioni di equilibrio delle forze e dei momenti.

- a) le forze di taglio sulle pareti di una sezione devono soddisfare le tre relazioni di equilibrio della statica nel piano della sezione:

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad \sum F_z = 0 \quad ; \quad \sum M_t = 0$$

che consentono di determinare flussi incogniti costanti qualora il numero di pareti è ≤ 3 (salvo che le risultanti dei flussi delle tre pareti non risultino parallele o si incontrino in un punto);

- b) gli sforzi assiali sulle flange devono soddisfare alle tre relazioni di equilibrio della statica fuori del piano della sezione:

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad \sum M_y = 0 \quad ; \quad \sum M_z = 0$$

che consentono di determinare gli sforzi incogniti qualora il numero di flange è ≤ 3

Sezione con una parete e due flange

Resiste solo ad M_y , e T_z nel (C.T.)

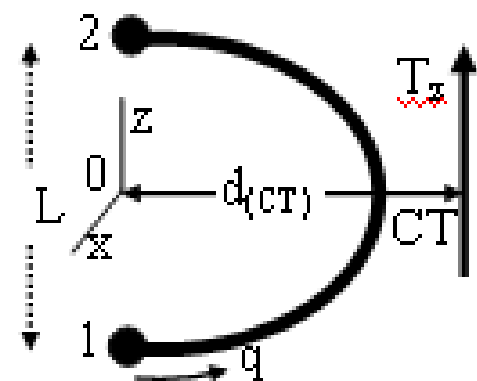
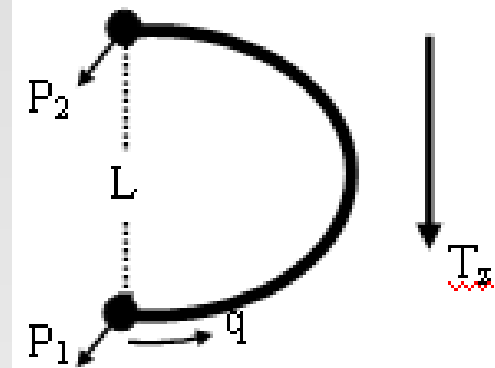
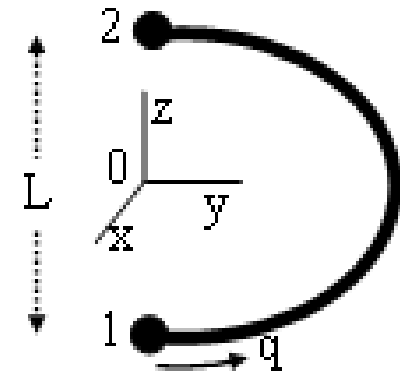
Tre incognite, un q sulla parete e **due** forze assiali sulle due aree concentrate:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow qL + T_z \Rightarrow q = -\frac{T_z}{L}$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow P_1 + P_2 = 0 \\ \sum M_y = 0 \Rightarrow P_1L + M_y = 0 \end{cases} \Rightarrow P_1 = -\frac{M_y}{L} = -P_2$$

$$R_y = q \int_1^2 \frac{dy}{ds} ds = 0 ; R_z = q \int_1^2 \frac{dz}{ds} ds = qL$$

$$d_{(C.T.)} = \frac{2qA^{(0)}}{R_z} = \frac{2qA^{(0)}}{qL} = \frac{2A^{(0)}}{L}$$



Sezione con due pareti e due flange

Resiste solo ad M_y , M_t e T_z .

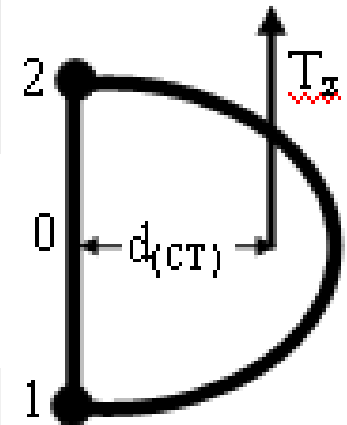
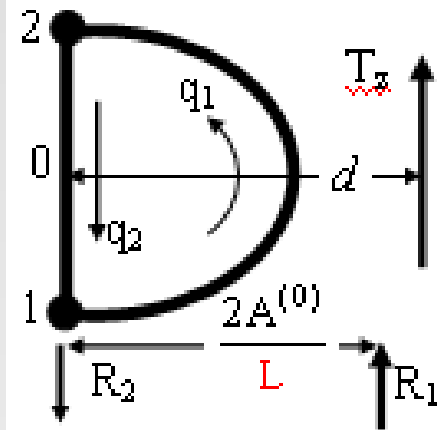
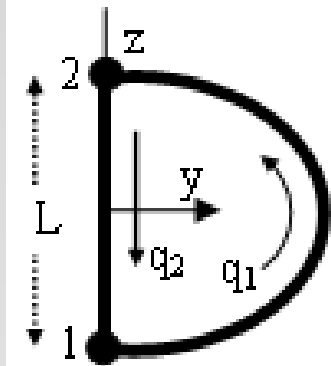
Oltre a P_1, P_2 analoghe al caso precedente, si hanno due incognite, q_1, q_2 sulle due pareti.

Utilizzando il concetto di pannello “dritto”:

$$R_1 = q_1 L \quad ; \quad R_2 = q_2 L$$

$$\begin{cases} \sum F_z = T_z + R_1 - R_2 = 0 \\ \sum M_t^{(0)} = T_z d + 2A^{(0)} q_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = -\frac{T_z d}{2A^{(0)}} \\ q_2 = T_z \left(\frac{1}{L} - \frac{d}{2A^{(0)}} \right) \end{cases}$$

$$\left[-\frac{L_1 d_{[C.T.]}}{2A^{(0)} t_1} + \frac{1}{t_2} \left(1 - \frac{L d_{[C.T.]}}{2A^{(0)}} \right) \right] = 0 \Rightarrow d_{[C.T.]} = \frac{2A^{(0)} t_1}{L_1 t_2 + L t_1}$$



Sezione con due pareti e tre flange

è in grado di sopportare momenti flettenti agenti su qualsiasi piano ma non momenti torcenti. Quindi:

- **T** può avere direzione qualsiasi;
- **T** deve essere applicato nel C.T. perché la sezione aperta non è in grado di resistere a torsione.

