

COSTRUZIONI AEROSPAZIALI

Principi Energetici

Metodi Variazionali

- Il metodo variazionale e' un metodo alternativo per determinare le equazioni di equilibrio di un sistema.
- E' un metodo che utilizza le regole del calcolo variazionale senza entrare nel merito di considerazioni fisiche del problema in esame.
- Come tutti i metodi matematici presenta alcuni vantaggi e svantaggi.

Principi variazionali

I principi variazionali affermano che tra tutti gli stati compatibili con i vincoli, **quello di equilibrio** è tale per cui un certo funzionale ha valore stazionario.

A)–Principio fisico–matematico

In particolare ci si riferisce al caso in cui il funzionale è l'energia, nel qual caso si parla di *stazionarietà* e/o di *minimizzazione* dell'energia potenziale.

Minimizzazione implica stazionarietà ma **non** sempre è vero il viceversa. Infatti nello studio delle strutture:

- al concetto di stazionarietà è associato il concetto di **equilibrio**;
- al concetto di minimizzazione è associato il concetto di **stabilità**.

Imporre la stazionarietà significa imporre l'equilibrio; se poi alle posizioni di equilibrio corrisponde un minimo queste risultano essere stabili.

B)–Il funzionale è inteso come un generico “costo”

- In economia il funzionale indica generalmente il profitto o la perdita ed al funzionale si dà il nome generico di costo o “funzione obiettivo”, perché consente di precisare la strategia che garantisce il massimo “profitto”.
- Nell’ingegneria applicazioni tipiche si hanno nella teoria del controllo, in campo strutturale, aerodinamico, ...

Punti di stazionarietà e estremi di una funzione

Sia φ una funzione continua e differenziabile, il problema che ci poniamo è di trovare i punti dove questa risulta massima o minima.

Un tale problema può essere affrontato in due modi:

- a)-*metodo diretto*: si calcola la funzione nei vari punti, scelti magari con criteri razionali che riducano il lavoro, e trovare per confronto i valori massimi e/o minimi.
- b)-*metodo indiretto*: si impongono le condizioni necessarie e sufficienti a cui deve soddisfare un punto di massimo e/o minimo.

A) Funzioni di una variabile $\varphi(x)$

Indicando con δx una piccola variazione nell'intorno di un generico punto x_0 e sviluppando $\varphi(x)$ in serie di Taylor:

$$\varphi(x_0 + \delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0)\delta x + \frac{1}{2}\varphi''(x_0)(\delta x)^2 + \dots = \delta\varphi + \delta^2\varphi + \dots$$

Il segno della *variazione totale* dipende dal segno $\delta\varphi$ che cambia di segno a seconda del segno di δx .

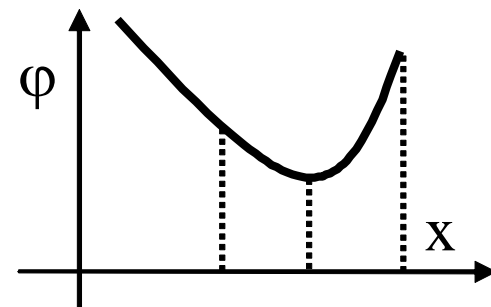
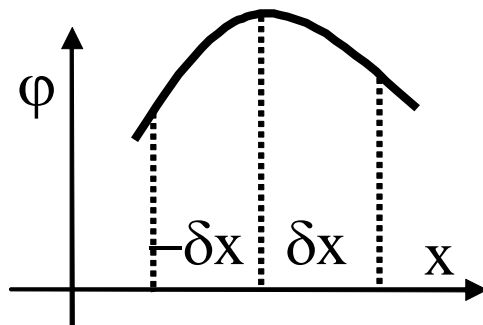
Si ha un punto di estremo se qualunque δx si prenda la variazione totale ha sempre lo stesso segno

Si ha indipendenza se:

1) $\delta\varphi = \varphi'\delta x = 0$

ma δx è arbitrario:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \Rightarrow \varphi' = 0$$



I punti dove la tangente è orizzontale ($\varphi'=0$) sono detti *punti di stazionarietà*.

In tali punti non è detto che si abbia un estremo quindi $\varphi'=0$ è *condizione necessaria ma non sufficiente* perché si abbia un estremo. Infatti nei punti di stazionarietà si

2) $\delta^2\varphi = \varphi''(\delta x)^2 = 0$ ma $(\delta x)^2 > 0$:

$$\varphi''(x_0) > 0 \text{ minimo} ; \varphi''(x_0) < 0 \text{ massimo}$$

A) Funzioni di una variabile $\varphi(x)$

In conclusione nel punto di stazionarietà, se indichiamo con $n (>1)$ l'ordine di derivazione più basso per cui $\varphi^{(n)} \neq 0$, si ha :

$$\begin{cases} n > 1 & \text{pari} & \text{e} & \varphi^{(n)} > 0 & \text{minimo} & \text{in } x_0 \\ n > 1 & \text{pari} & \text{e} & \varphi^{(n)} < 0 & \text{massimo} & \text{in } x_0 \\ n > 1 & \text{dispari} & \text{e} & \varphi^{(n)} \neq 0 & \text{flesso} & \text{in } x_0 \end{cases}$$

Pertanto condizione necessaria e sufficiente perché in un punto la funzione abbia un minimo (massimo) è che:

- il punto deve essere di stazionarietà, ovvero sia verificata la $\varphi'=0$;
- la derivata non nulla di ordine più basso, calcolata nel punto di stazionarietà, risulti di ordine pari e positiva (negativa).

Esempio

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} Kx^2 - Fx$$

Punto stazionario

$$\delta\varphi = 0 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = Kx - F = 0 \Rightarrow x^* = \frac{F}{K}$$

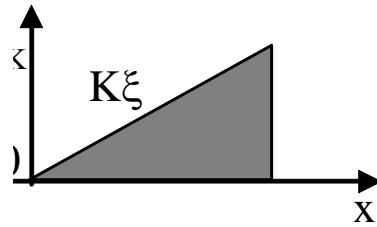
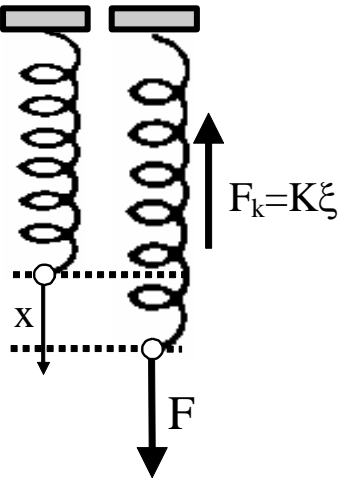
Punto di minimo

$$\left(\delta^2\varphi\right)_{x=x^*} = 0 \Rightarrow \left(\frac{d^2\varphi}{du^2}\right)_{x=x^*} = K > 0$$

Vediamo di dare un significato fisico a φ , $\delta\varphi$, $\delta^2\varphi$

Significato fisico di $\varphi(x)$: è il lavoro *effettivo* e/o l'Energia

Forza di richiamo elastica opposta allo spostamento



$$L_K = - \int_0^x F_K(\xi) d\xi = - \int_0^x (K\xi) d\xi = -\frac{1}{2} Kx^2 \quad ; \quad L_F = \int_0^x F d\xi = Fx$$

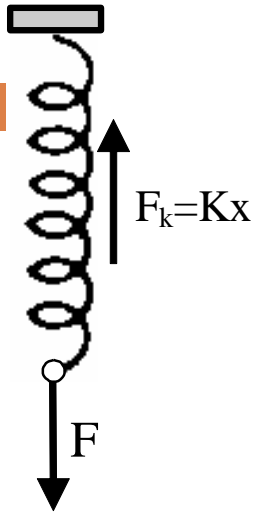
$$L(x) = L_K + L_F = -\frac{1}{2} Kx^2 + Fx$$

$$\begin{cases} U = -L_K = \frac{1}{2} Kx^2 \\ V = -L_F = -Fx \end{cases} \Rightarrow E(x) = U + V = \frac{1}{2} Kx^2 - Fx = -L(x)$$

$$\delta E = -\delta L = 0 \quad \Rightarrow \quad (Kx - F)\delta x = -(Kx - F)\delta x = 0$$

$$\delta^2 E = -\delta^2 L > 0 \quad \Rightarrow \quad K\delta^2 x > 0$$

–Imporre la stazionarietà, significa: scrivere l'equazione di equilibrio.

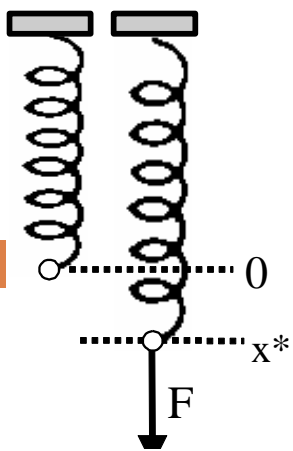


$$\delta E = -\delta L = 0 \quad \Rightarrow \quad (Kx - F)\delta x = -(Kx - F)\delta x = 0$$
$$Kx - F = 0$$

–trovare le condizioni di minimo nel punto la stazionarietà, significa: trovare le condizioni affinché la posizione di equilibrio risulti stabile.

$$\delta^2 E = -\delta^2 L > 0 \quad \Rightarrow \quad K\delta^2 x > 0$$
$$K > 0$$

Significato fisico di $\delta\varphi(\mathbf{x})$: Lavoro *virtuale*



La molla sia nella posizione di equilibrio x^* sotto l'azione di una forza F .

Nella posizione di equilibrio, diamo uno spostamento *virtuale* $\delta x \neq 0$, ovvero uno spostamento tale che:

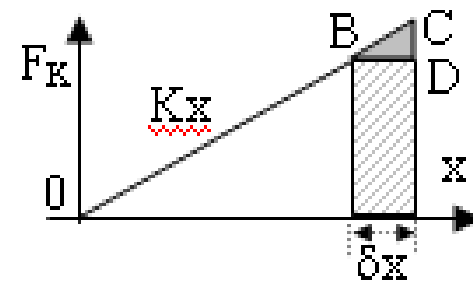
1. *Pur ipotetico*, potrebbe essere compiuto dal sistema rispettando i vincoli cinematici operanti nella posizione di equilibrio x^* .
2. Sufficientemente piccolo da trascurare variazioni nella configurazione e nelle forze in gioco.

Dunque all'equilibrio si ha:

$$\delta L = 0 \Rightarrow (F - Kx)\delta x \Rightarrow F\delta x - Kx\delta x = 0$$

$$\delta L_F = F\delta x \quad ; \quad \delta L_K = -Kx\delta x$$

Sistema "congelato" nella sua posizione di equilibrio



Il lavoro virtuale $Kx\delta x$ rappresenta la variazione prima del lavoro elastico

$$\begin{aligned}L_K(x + \delta x) - L_K(x) &= \frac{dL_K}{dx} \delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2L_K}{dx^2} \delta x^2 = \\ &= -Kx\delta x - \frac{1}{2} (K\delta x)\delta x = -Kx\delta x - \frac{1}{2} \cancel{\delta F \delta x}\end{aligned}$$

P.L.V

$$\delta L = (\delta L_I + \delta L_E) = (\delta U + \delta V) = (\delta U - \delta L_E) = 0$$

Coordinate generalizzate e G.L.

La posizione di una particella libera nello spazio può essere definita attraverso le sue coordinate cartesiane x, y, z ; se non vincolata possiede tre gradi di libertà (G.L.).

Un sistema di M particelle, ognuna con tre G.L. possiede quindi $3M$ gradi di libertà: x_i, y_i, z_i .

In luogo di tali $3M$ coordinate si possono impiegare $3M$ generici parametri linearmente indipendenti q_1, q_2, \dots, q_{3M} legati alle x_i, y_i, z_i da una trasformazione biunivoca:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_{3M}); y_1 = y_1(q_1, \dots, q_{3M}); z_1 = z_1(q_1, \dots, q_{3M}) \\ \text{-----} \\ x_M = x_M(q_1, q_2, \dots, q_{3M}); \dots \end{array} \right.$$

Si indicano come *coordinate generalizzate* o *coordinate lagrangiane* i parametri che individuano in modo univoco la posizione di un sistema; il loro numero è pari ai G.L.

B) Funzioni di più variabili $\varphi(\mathbf{X})$

Con considerazioni analoghe alle precedenti per assicurare un estremo deve risultare nulla la variazione prima di $\varphi(q_1, q_2, \dots, q_N)$:

$$1) \quad \delta\varphi(\mathbf{Q}) = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial q_N} \delta q_N = \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial q_n} \right\}^T \{\delta\mathbf{Q}\} = 0$$

ma $\{\delta\mathbf{Q}\}$ è arbitrario: quindi N condizioni necessarie nelle N incognite $\{\mathbf{Q}\}$

$$\left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial q_n} \right\} = 0$$

$$2) \quad \delta^2\varphi = \frac{1}{2} \{\delta\mathbf{Q}\}^T \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i \partial q_j} \right]_{\mathbf{x}_0} \{\delta\mathbf{Q}\} \Rightarrow \frac{1}{2} \{\delta\mathbf{Q}\}^T [\varphi''_{ij}]_{\mathbf{x}_0} \{\delta\mathbf{Q}\}$$

Per avere $\delta^2\varphi$ sempre >0 o sempre <0 , per qualsiasi $\{\delta\mathbf{Q}\}$, la matrice $[\varphi''_{ij}]$ deve possedere particolari requisiti. In particolare per avere un minimo deve risultare $\delta^2\varphi >0$ che è garantito se $[\varphi''_{ij}]$ è definita positiva:

$$\Delta_1 = \varphi''_{11} > 0 ; \Delta_2 = \begin{vmatrix} \varphi''_{11} & \varphi''_{12} \\ \varphi''_{21} & \varphi''_{22} \end{vmatrix} > 0 ; \Delta_n = \begin{vmatrix} \varphi''_{11} & \varphi''_{12} & \dots & \varphi''_{1n} \\ \varphi''_{21} & \varphi''_{22} & \dots & \varphi''_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi''_{n1} & \varphi''_{n2} & \dots & \varphi''_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Funzionali: stazionarietà ed estremali

Si indica come *funzionale* $J[\varphi(x)]$ una “funzione di funzione” per cui ad ogni funzione φ corrisponde un valore numerico $n=J[\varphi]$.

E' un funzionale l'energia di deformazione che per corpo elastico-lineare si scrive:

$$U = \frac{1}{2} \int_{dV} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{Bmatrix}^T [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{Bmatrix} dV$$

Asta tirata

$$U(u) = \frac{1}{2} \int_{dV} \varepsilon \sigma dV = \frac{AE}{2} \int_0^L \varepsilon^2 dx = \frac{AE}{2} \int_0^L \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx$$

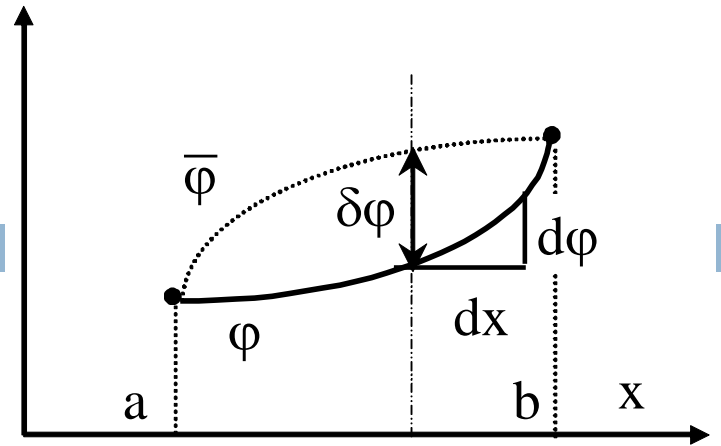
Trave inflessa

$$U(w) = \frac{b}{2} \int_0^L dx \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma \varepsilon) dz = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx$$

A)

$$J[\varphi, \varphi'] = \int_a^b F(x, \varphi, \varphi') dx$$

$$\bar{\varphi} = \varphi + \delta\varphi \quad ; \quad \bar{\varphi}' = \varphi' + \delta\varphi'$$



$$J[\bar{\varphi}, \bar{\varphi}'] - J[\varphi, \varphi'] = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi'} \delta\varphi' \right) dx + \dots = \delta J + \delta^2 J + \dots$$

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \varphi'} \delta\varphi' dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \varphi'} d(\delta\varphi) = \frac{\partial F}{\partial \varphi'} \delta\varphi \Big|_a^b - \int_a^b \delta\varphi d\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right)$$

$$\delta J = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right] \delta\varphi dx + \frac{\partial F}{\partial \varphi'} \delta\varphi \Big|_{x=a}^{x=b} = 0$$

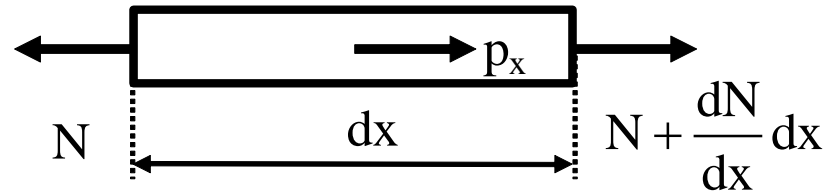
1) Nel campo:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \varphi'} = 0$$

2) Agli estremi:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \delta\varphi \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \Rightarrow \varphi \Big|_{x_1}^{x_2} = \text{cost} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi'} \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

Esempio: Asta tirata



$$J[u(x)] = \int_0^L \left(\frac{AE}{2} u'^2 - pu \right) dx$$

$$F = \frac{AE}{2} u'^2 - pu$$

EQUILIBRIO

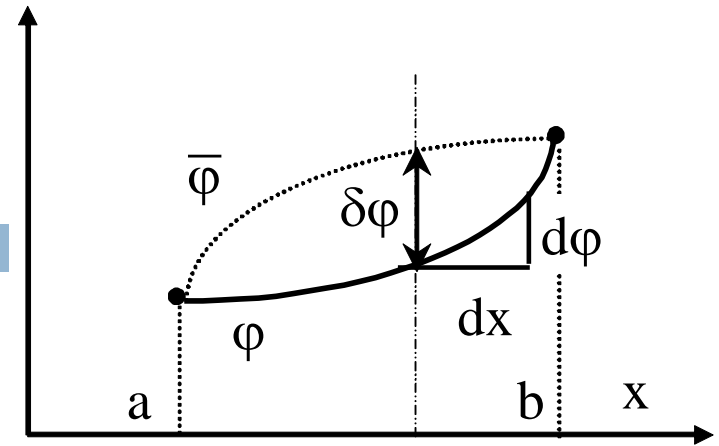
1) Nel campo $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \Rightarrow p + \frac{d}{dx} \left[EA \frac{du}{dx} \right] = 0 \Rightarrow EA \frac{d^2 u}{dx^2} + p = 0$

2) Agli estremi $u|_{x_1}^{x_2} = \text{cost} ; AE \frac{du}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$

B)

$$J[\varphi, \varphi', \varphi''] = \int_a^b F(x, \varphi, \varphi', \varphi'') dx$$

$$\delta J = \int_a^b \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi''} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right) + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right] \delta \varphi dx + \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi''} \right) \right] \delta \varphi \Big|_a^b + \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi''} \right] \delta \varphi' \Big|_a^b = 0$$



1) Nel campo:

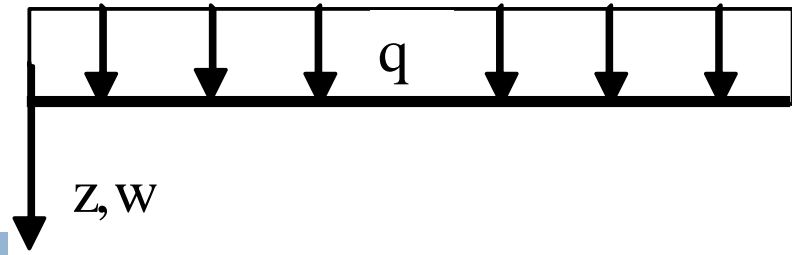
$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi''} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} \right) + \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0$$

EQUILIBRIO

2) Agli estremi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \Big|_a^b \text{ assegnato} \quad \text{oppure} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \varphi''} \right) \Big|_a^b = 0 \\ \varphi' \Big|_a^b \text{ assegnato} \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi''} \Big|_a^b = 0 \end{array} \right.$$

Esempio: trave inflessa



Energia

Lavoro

$$E = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} (w'')^2 - qw \right] dx$$

$$F = \frac{EI}{2} w''^2 - qw$$

1) Nel campo

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial w''} + \frac{\partial F}{\partial w} = 0 \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q$$

2) Agli estremi

| Cond.Geom | Cond.Natur |
|-------------------------------------|---|
| $w _0^L$ assegnata | $\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \Big _0^L = 0$ |
| $\frac{dw}{dx} \Big _0^L$ assegnata | $EI \frac{d^2 w}{dx^2} \Big _0^L = 0$ |

Condizioni al contorno essenziali e naturali

Se M è l'ordine massimo di derivazione con cui φ compare nel funzionale, l'equazione differenziale di Eulero è di ordine $2M$ cui vanno associate $2M$ condizioni agli estremi.

Distinguiamo tali condizioni in due classi:

1) Quelle in cui la funzione compare con derivata massima $< M-1$.

Tali condizioni vengono genericamente indicate nei testi di matematica come condizioni *essenziali*. In meccanica, poiché corrispondono in generale a condizioni sulle variabili di stato cinematiche, vengono indicate come *cinematiche* o *geometriche* o *sugli spostamenti*.

2) Quelle dove la funzione compare con derivata massima $\geq M-1$ e $\leq 2M-1$.

Tali condizioni vengono genericamente indicate nei testi di matematica come condizioni *naturali*. In meccanica, perché corrispondono in generale a condizioni sulle variabili di stato cinetiche, vengono indicate come *cinetiche* o *sulle forze*.

Il principio di stazionarietà dell'energia potenziale

“condizione necessaria perché un sistema sia in equilibrio è che sia stazionaria l'energia potenziale del sistema”.

Il principio del minimo della energia potenziale

“Tra tutti gli spostamenti ammissibili, quelli di equilibrio sono tali per cui l'energia potenziale totale ha un minimo assoluto”.

Se il sistema è LINEARE: $\partial^2 E / \partial q^2 > 0$ (SEMPRE) quindi

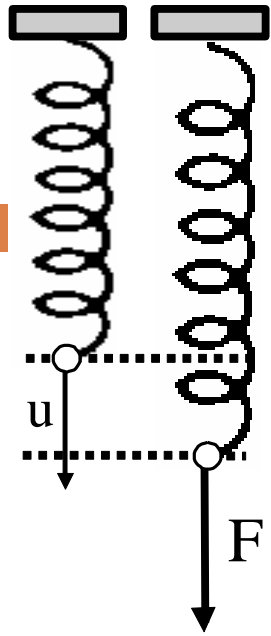
“condizione necessaria e sufficiente perché un sistema sia in equilibrio stabile è che sia stazionaria l'energia potenziale del sistema”.

Principio dei Lavori Virtuali

$$\begin{aligned}\delta L_{\text{Tot}} &= \delta(L_{\text{Elastiche}} + L_{\text{Applicate}}) = \\ &= \delta(-U_{\text{Elastiche}} + L_{\text{Applicate}}) = 0\end{aligned}$$

Se le forze applicate sono conservative:

$$\delta E = -\delta(U + V) = 0$$



A)– Equilibrio

- Somma delle forze $F_K = F \Rightarrow Ku = F$

- Principio dei lavori virtuali

$$\delta L_K + \delta L_F = 0 \Rightarrow \delta(L_K + L_F) = 0$$

$$\delta U_K - \delta L_F = 0 \Rightarrow \delta(U_K - L_F) = 0$$

$$\begin{cases} \delta U_K = Ku\delta u \\ \delta L_F = F\delta u \end{cases} \Rightarrow Ku\delta u - F\delta u = 0$$

Essendo δu arbitrario:

$$Ku = F$$

Principio dei Lavori Virtuali

1) Spostamenti

$$\int_V \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} dV - \int_V \{B\}^T \{\delta S_v\} dV - \int_{S_1} \{f\}^T \{\delta S_s\} dS_1 - \{F_j\}^T \{\delta S_j\} = 0$$

Cinematicamente compatibili

2) Forze

$$\int_V \{\varepsilon\}^T \{\delta\sigma\} dV - \int_V \{S_v\}^T \{\delta B\} dV - \int_{S_2} \{S_s\}^T \{\delta f\} dS_2 - \{S_j\}^T \{\delta F_j\} = 0$$

Cinematicamente compatibili

Considerazioni sui principi energetici

Nell'ambito della teoria lineare dell'elasticità con *forze conservative* valgono:

- a)–il principio del minimo dell'energia potenziale totale;
- b)–il principio del minimo dell'energia potenziale **complementare** totale.

Ambedue garantiscono il rispetto dei requisiti visti nell'impostazione di un problema elastico:

Il principio a) soddisfa:

- 1)–le relazioni costitutive: esprimendo $U(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ come $U(\boldsymbol{\varepsilon})$;
- 2)–le relazioni cinematiche: esprimendo $U(\boldsymbol{\varepsilon})$ come $U(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$;
- 3)–le condizioni al contorno sugli spostamenti: al funzionale dell'energia vanno associate le condizioni al contorno S_2 dove sono dati gli spostamenti;
- 4)–le equazioni di equilibrio imponendo la stazionarietà dell'energia.

Il principio b) soddisfa:

- 1)–le equazioni costitutive: esprimendo $U(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ come $U(\boldsymbol{\sigma})$;
- 2)–soddisfa l'equilibrio nel campo ed sul contorno S_1 : scegliendo un sistema di forze equilibrato;
- 3)–soddisfa le relazioni cinematiche imponendo la stazionarietà dell'energia complementare.

segue: Considerazioni sui principi energetici

I due principi presentano sostanziali differenze nella loro pratica applicazione.

- a) Nel principio del minimo dell'energia potenziale, equivalente a quello degli *spostamenti* virtuali, per garantire che gli spostamenti siano virtuali devono essere soddisfatte le condizioni sugli spostamenti (al contorno S_2).
- b) Nel il principio del minimo dell'energia potenziale **complementare**, equivalente a quello delle *forze* virtuali, per garantire che le forze siano virtuali devono essere soddisfatte le condizioni di equilibrio nel campo e le condizioni sulle forze (al contorno S_1).

In generale, risulta più agevole scegliere deformazioni cinematicamente compatibili piuttosto che forze staticamente compatibili ed è per questo che il principio a) trova più vasto impiego del principio b).

In altri termini il primo equivale ad avere come incognite gli spostamenti, il secondo ad avere come incognite gli sforzi e sono i duali del “metodo degli spostamenti” e rispettivamente del “metodo degli sforzi”.

Confronto: impostazione differenziale ed integrale

Nella teoria dell'elasticità il modello matematico può essere ottenuto:

1)–**Impostazione integrale:** imponendo che sia minima l'energia potenziale

$$E = \int_V F(\Phi, \Phi', \dots) dV + \int_{S_1} G(\Phi, \Phi', \dots) dS_1 = \text{staz. e/o min}$$

$$\bar{B}(\Phi) = \bar{B}^* \quad \text{su } S_2 \quad (\text{quindi sugli spostamenti})$$

2)–**Impostazione differenziale:** scrivendo l'equilibrio dell'elemento rappresentativo della struttura

$$L(\Phi) = f \quad \text{nel campo}$$

$$B(\Phi) = B^* \quad \text{su } S = S_1 + S_2 \quad \text{quindi su forze e spostamenti}$$

“Discretizzazione” del continuo

E' però pensabile di risolvere il problema integrale direttamente senza passare attraverso le equazioni di Eulero.

Le soluzioni esatte delle due impostazioni sono chiaramente coincidenti ma tale ricerca non sempre risulta facile e/o possibile per cui, poiché dal punto di vista ingegneristico può essere sufficiente una soluzione approssimata, trova vasto impiego la tecnica di “discretizzare” il problema.

Il termine “discretizzare” viene qui inteso nella sua accezione più ampia di rappresentare un continuo con un certo numero finito di parametri.

Questa discretizzazione può essere condotta:

- a)–direttamente sul corpo considerandolo come un “mosaico” le cui varie “tessere” sono elementi strutturali semplici il cui comportamento è descritto da un numero finito di variabili di stato: tecnica degli “**Elementi Finiti**” ;
- b)–sul modello matematico, sia questo integrale o differenziale, attraverso la definizione delle funzioni incognite con un numero discreto di parametri.

Discretizzazione

1)–Impostazione integrale:

$$E_M = \int_0^a F(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^M) dx = \min \bar{B}(\varphi) = \bar{B}^* \text{ sul contorno}$$

2)–Impostazione differenziale:

$$L_{2M}(\varphi) = f \quad B(\varphi) = B^*$$

Soluzione approssimata

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n(x)$$

- scegliere le φ_n la cui combinazione lineare soddisfa le condizioni agli estremi del tipo di impostazione scelto;
- determinare le c_n in modo da soddisfare a seconda del tipo di impostazione scelta ($E_M = \min$ oppure $L_{2M} = f$).

Condizioni al contorno non omogenee

Nel caso di condizioni agli estremi *non omogenee*, la scelta di φ_n risulta difficoltosa e poco pratica, mentre risulta più agevole quando le condizioni agli estremi sono omogenee.

In quest'ultimo caso infatti è sufficiente che ciascuna delle φ_n soddisfi alle condizioni omogenee perché anche la loro combinazione lineare le soddisfi.

E' quindi evidente l'opportunità di effettuare il cambio di variabile $\varphi = \varphi_0 + \phi$ per trasformare un problema con condizioni agli estremi non omogenee in φ ad un problema con condizioni agli estremi omogenee in ϕ .

Infatti, considerato un generico operatore lineare B , si ha:

$$B(\varphi) = \mathbf{B}^* \quad \Rightarrow \quad B(\varphi_0 + \phi) = \mathbf{B}^* \quad \Rightarrow \quad B(\varphi_0) + B(\phi) = \mathbf{B}^*$$

$$B(\varphi_0) = \mathbf{B}^* \qquad B(\phi) = 0$$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

Metodi di Ritz e Galerkin

A)–Metodo di Ritz, presuppone la conoscenza del funzionale di cui si ricerca l'estremale.

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{n=1}^N c_n \psi_n(x)$$

$$\bar{B}(\varphi_0) = \bar{B}^*$$

$$\bar{B}(\psi_n) = 0$$

$$E = \int_0^a F(\varphi, \varphi', \dots) dx = \min$$

$$E = \Pi(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots, c_N) = \min \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_n} = 0$$

$$[A] \{C\} = \{F\}$$

Metodi di Ritz e Galerkin

B)–Metodo di Galerkin, risolve il sistema differenziale

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{n=1}^N c_n \chi_n(x)$$

$$\mathbf{B}(\varphi_0) = \mathbf{B}^*$$

$$\mathbf{B}(\chi_n) = 0$$

$$\mathbf{L}_{2M}(\varphi) = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{L}_{2M}\left(\sum_{n=1}^N c_n \chi_n\right) - [\mathbf{f} - \mathbf{L}_{2M}(\varphi_0)] = \varepsilon(x)$$

Il metodo di Galerkin consiste nell'imporre che sia nullo il valore medio dell'errore pesato con delle funzioni quali le χ_m .

Pertanto moltiplicando l'equazione nel campo per χ_m ed integrando:

$$\alpha_{mn} = \int_0^a \mathbf{L}_{2M}(\chi_n) \chi_m dx \quad ; \quad \mathbf{g}_m = \int_0^a [\mathbf{f} - \mathbf{L}_{2M}(\varphi_0)] \chi_m dx$$

$$\sum_{n=1}^N c_n \alpha_{nm} - \mathbf{g}_m = 0 \quad ; \quad m = 1, 2, \dots, N$$

$$[\mathbf{A}^*] \{\mathbf{C}^*\} = \{\mathbf{F}^*\}$$

Confronto tra l'impostazione integrale e differenziale

A)–Impostazione differenziale:

vantaggi:

- derivazione del sistema differenziale sulla base di considerazioni fisiche;
- generalità del modello matematico in termini differenziali, prescindendo dalla conoscenza del funzionale

svantaggi:

- ordine massimo di derivazione con cui compare la funzione incognita = $2M$;
- le funzioni χ_m dello sviluppo devono soddisfare alle condizioni al contorno sia di tipo essenziale (cinematiche) che naturale (cinetiche).

B)–Impostazione variazionale:

vantaggi:

- ordine massimo di derivazione con cui compare la funzione incognita = M ;
- le funzioni coordinate devono soddisfare alle sole condizioni al contorno di tipo essenziale (cinematiche);

svantaggi:

- non generalità del metodo perché si deve conoscere il funzionale;
- astrazione del problema poiché il funzionale, pur mantenendo un significato matematico non sempre ha un corrispettivo fisico.