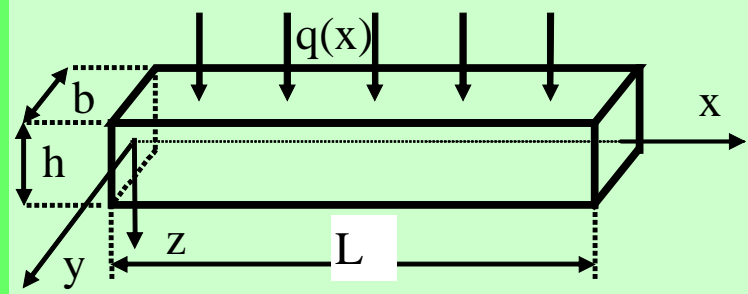


# COSTRUZIONI AEROSPAZIALI

Applicazioni del metodo di Ritz e Galeerkin  
alla trave elastica

# Teoria classica della Trave



## Ipotesi

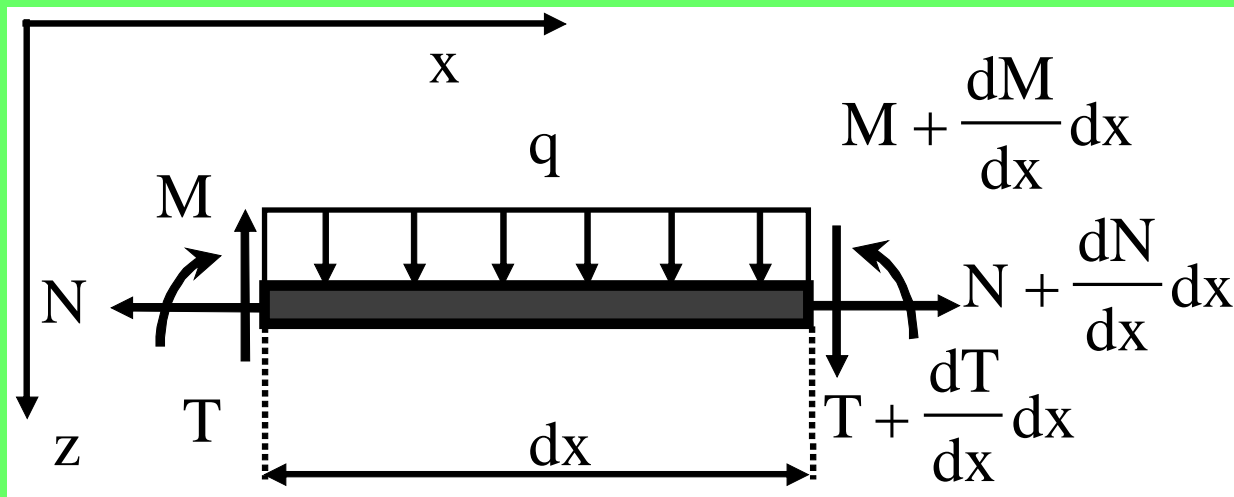
1. Il materiale è omogeneo, isotropo e a comportamento elastico lineare.
2. La struttura è ad asse rettilineo ed a sezione costante.
3. Le forze esterne  $q(x)$ , per unità di lunghezza, agiscono solo nel piano  $xz$ .
4. I carichi assiali agiscono lungo l'asse baricentrico  $x$ .
5. La larghezza  $b$  è dello stesso ordine di grandezza dello spessore  $h$ .
6. La lunghezza  $L$  sia tale che  $(h/L)^2 \ll 1$ :  $h < L/10$ .

7. Lo spostamento  $w$  è tale che  $w/h < 1$ :  $w_{\text{Max}} < h/5$ , ovvero  $w_{\text{Max}} < L/50$ .

Una tale ipotesi consente di considerare le coordinate del corpo deformato coincidenti con quelle del corpo indeformato.

8. Che la rotazione  $\theta$  della superficie media risulti piccola: ovvero  $\theta \ll 1$ .
9. Che sforzi e deformazioni dovute ai carichi assiali siano di un ordine di grandezza trascurabile rispetto a quelli indotti dalla flessione.

Possiamo allora considerare come elemento rappresentativo di trave quello di figura corrispondente ad un tratto  $dx$  della linea media, sollecitato da  $N, M, T$  dette *caratteristiche di sollecitazione*.

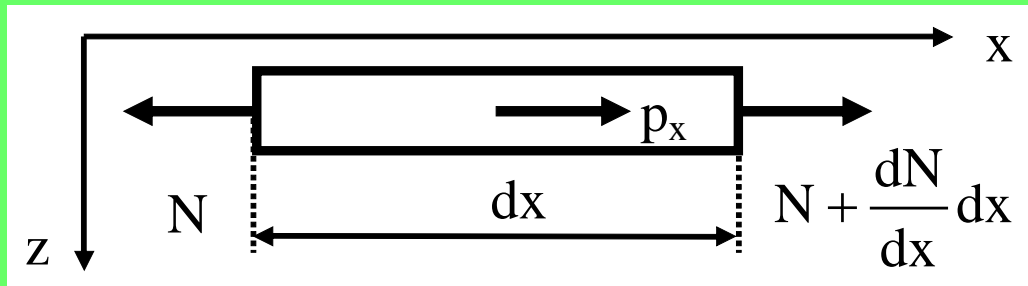


La teoria della trave introduce in definitiva tre incognite cinetiche  $N(x)$ ,  $M(x)$ ,  $T(x)$  e tre incognite cinematiche  $u_0(x)$ ,  $w_0(x)$  e  $\theta(x)$ .

Il numero delle incognite sembra aumentato rispetto alla teoria classica dell'elasticità nella quale le incognite sarebbero  $u(x,z)$ ,  $w(x,z)$ ,  $\sigma(x,z)$ ,  $\tau(x,z)$ .

Notiamo però che queste ultime sono funzioni di due variabili  $x, z$  mentre  $u_0(x), w_0(x), \theta(x)$  sono funzioni solo della variabile  $x$  si comprende la reale esemplificazione che comporta la teoria della trave.

# La trave tirata



$$\frac{dN}{dx} + p_x = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[ AE \frac{du_0}{dx} \right] + p_x = 0$$

Con relative condizioni agli estremi sullo spostamento  $u$  o sulle forze.

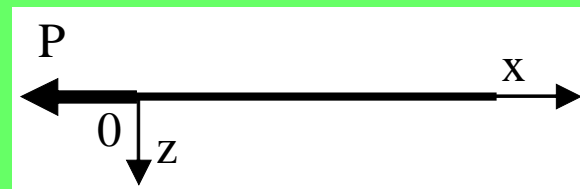
Spostamento impedito:

$$u(0)=0$$



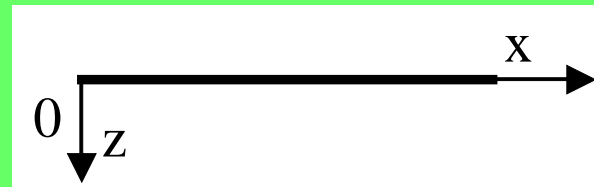
Carico P applicato:

$$\left( AE \frac{du}{dx} \right)_{x=0} = P$$

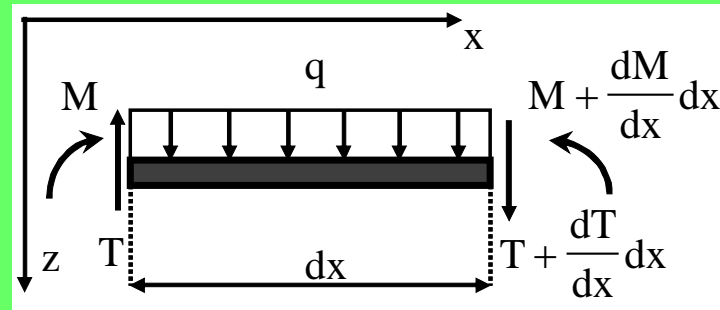


Libera

$$\left( AE \frac{du}{dx} \right)_{x=0} = 0$$



# La trave inflessa



–equilibrio delle forze in direzione z:

$$T + \frac{dT}{dx} dx - T + q dx = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dT}{dx} + q = 0$$

–equilibrio dei momenti rispetto all'estremo di sinistra:

$$M + \frac{dM}{dx} dx - M - \left( T + \frac{dT}{dx} dx \right) dx - q dx \frac{dx}{2} = 0$$

$$\frac{dM}{dx} - T = 0$$

Derivando la seconda ed utilizzando la prima:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0$$

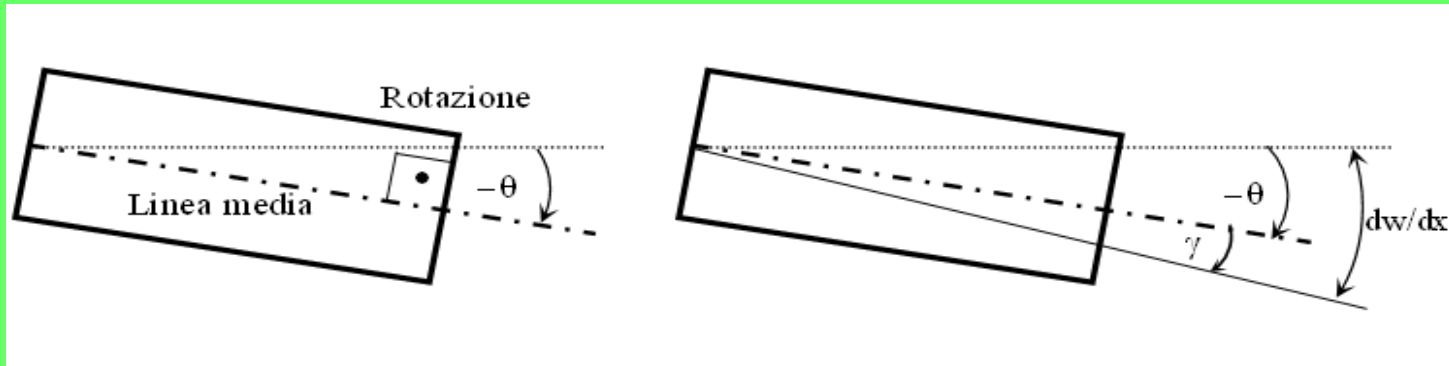
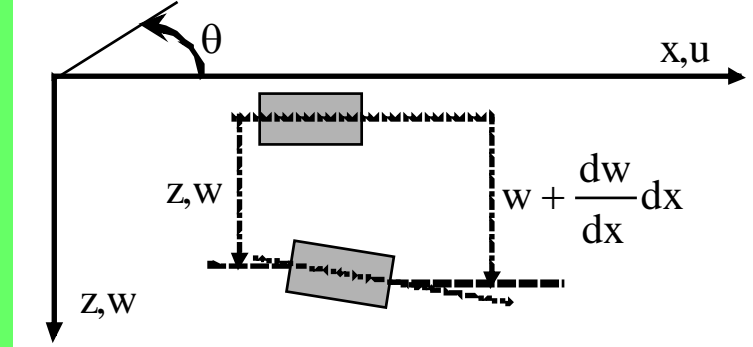
# Cinematica della trave inflessa

Scorrimento

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}(\mathbf{x}) = \frac{du_0(\mathbf{x})}{dx} + z \frac{d\theta(\mathbf{x})}{dx} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{dw_0(\mathbf{x})}{dx} + \theta(\mathbf{x}) \\ \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0 \end{array} \right.$$

# Cinematica della trave inflessa

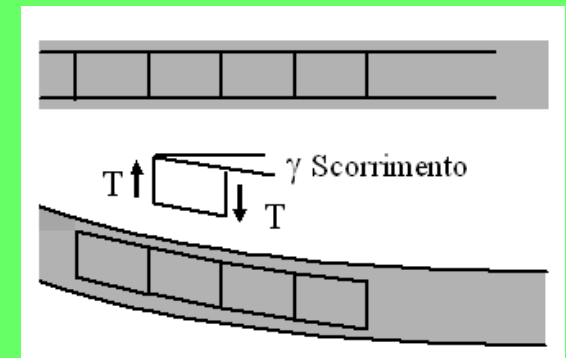
$$\gamma_{xz} = \theta + \frac{dw_0}{dx} \Rightarrow \frac{dw_0}{dx} = \gamma_{xz} - \theta$$



In presenza di  $\tau$  lo scorrimento  $\gamma=f(z)$  con  $\tau=0$  per  $z=\pm h/2$  e  $\tau_{Max}$  per  $z=0$ .

Pertanto  $\theta=f(x,z)$  e le sezioni non rimangono piane ma si deformano ad S. Volendo mantenere l'ipotesi di sezioni piane,  $\theta$  deve essere costante con  $z$  ovvero  $\gamma$  indipendente da  $z$ . Questo si ha assumendo:

- scorrimento nullo in ogni sezione,  $\gamma=0$ .
- tutti i punti di una generica sezione abbiano uguale scorrimento,  $\gamma=cost.$



## Trave di Kirchhoff: assume scorrimento nullo, $\gamma=0$ :

$$\gamma_{xz} = \theta + \frac{dw_0}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{dw_0}{dx}$$

$$M = EI \frac{d\theta}{dx} \quad \Rightarrow \quad M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$T = \frac{dM}{dx} \quad \Rightarrow \quad T = -EI \frac{d^3 w}{dx^3}$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = q$$

Con relative condizioni agli estremi su combinazioni di  $w$ ,  $\theta$ ,  $T$ ,  $M$ .



# Trave di Kirchhoff: assume scorrimento nullo, $\gamma=0$ :

## Principio variazionale

$$U = \frac{b}{2} \int_0^L dx \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}) dz = \frac{1}{2} \int_0^L EI (w'')^2 dx \quad ; \quad V = - \int_0^L q(x) w(x) dx$$

$$E = \int_0^L \left[ \frac{EI}{2} (w'')^2 - qw \right] dx = \int_0^L F(x, w, w'') dx$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial w''} + \frac{\partial F}{\partial w} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q$$

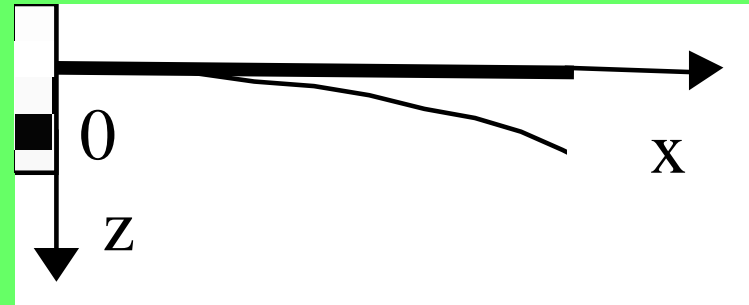
Con relative condizioni agli estremi

	Cond. Geometr	Cond. Naturali
$\left[ \frac{\partial F}{\partial w'} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) \right] \delta w \Big _0^L = 0 \Rightarrow w \Big _0^L$	assegnato	$\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \Big _0^L = 0$
$\left[ \frac{\partial F}{\partial w''} \right] \delta w' \Big _0^L = 0 \Rightarrow \frac{dw}{dx} \Big _0^L$	assegnato	$EI \frac{d^2 w}{dx^2} \Big _0^L = 0$

## Tipiche Condizioni agli estremi

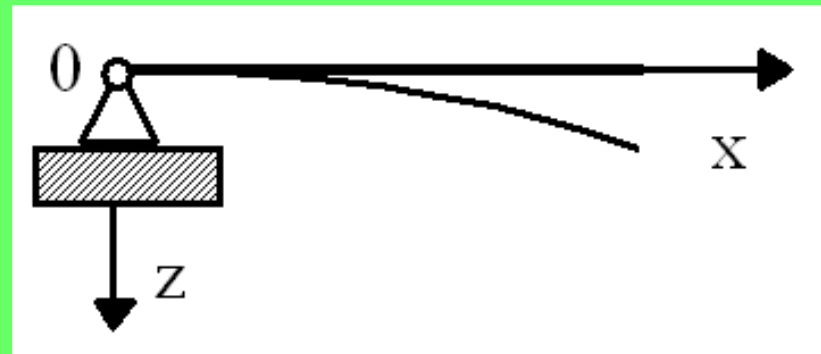
**1. Incastro:**  $w=\theta=0$

$$w(0) = \left( \frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0$$



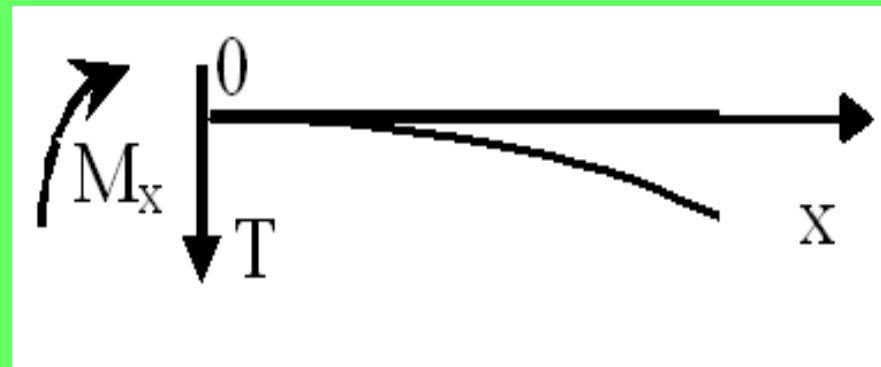
**2. Appoggio (con cerniera):**  
 $w=M=0$

$$w(0) = \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)_{x=0} = 0$$



**3. Libera:**  $M=T=0$

$$\left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)_{x=0} = \left( \frac{d^3w}{dx^3} \right)_{x=0} = 0$$



# Metodi di soluzione per la trave inflessa

## A)-Soluzione analitica esatta

**A1)**–impiegando le equazioni in cui le incognite sono solo le grandezze cinematiche (“spostamenti”)

$$EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -M(x)$$

con condizioni agli estremi sulle variabili cinematiche

**A2)**–impiegando le equazioni in cui le incognite sono sia le grandezze cinematiche (“spostamenti”) che cinetiche (“forze”)

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q$$

con condizioni agli estremi sulle variabili cinematiche e cinetiche

## Modello del 2° ordine

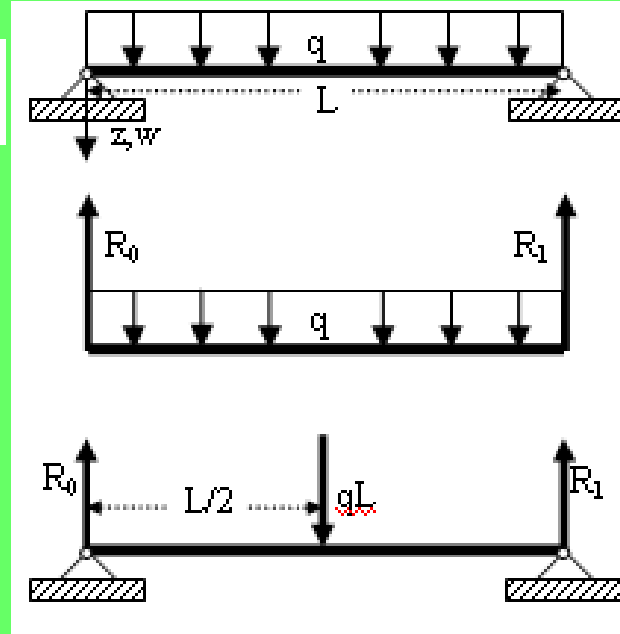
$$\begin{cases} R_0 + R_1 = qL \\ R_1 L - \frac{qL^2}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow R_0 = R_1 = \frac{qL}{2}$$

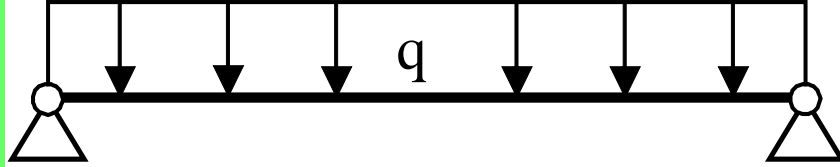
$$M(x) = R_0 x - \int_0^x q x dx = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} = \frac{qL^2}{2} \left[ \left( \frac{x}{L} \right) - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -M(x) \Rightarrow \begin{cases} \frac{dw}{dx} = \frac{qL^3}{24EI} \left[ 4 \left( \frac{x}{L} \right)^3 - 6 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right] + b \\ w = \frac{qL^4}{24EI} \left[ \left( \frac{x}{L} \right)^4 - 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right] + bL \frac{x}{L} + a \end{cases}$$

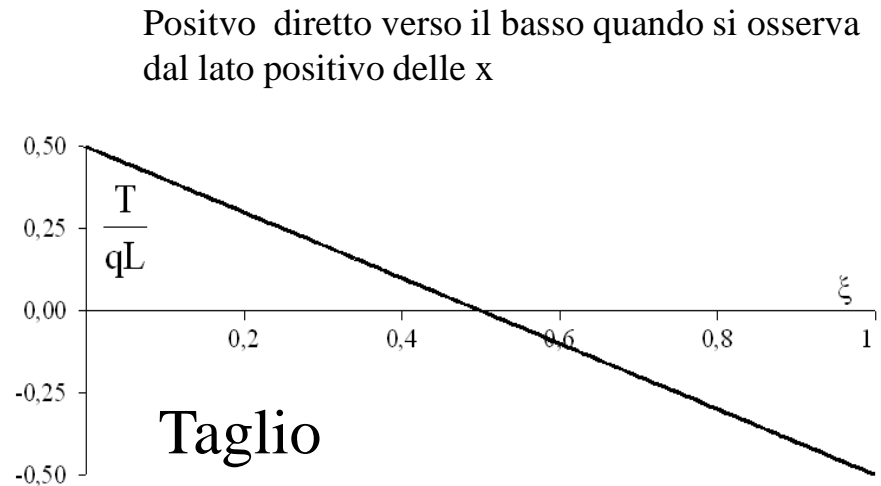
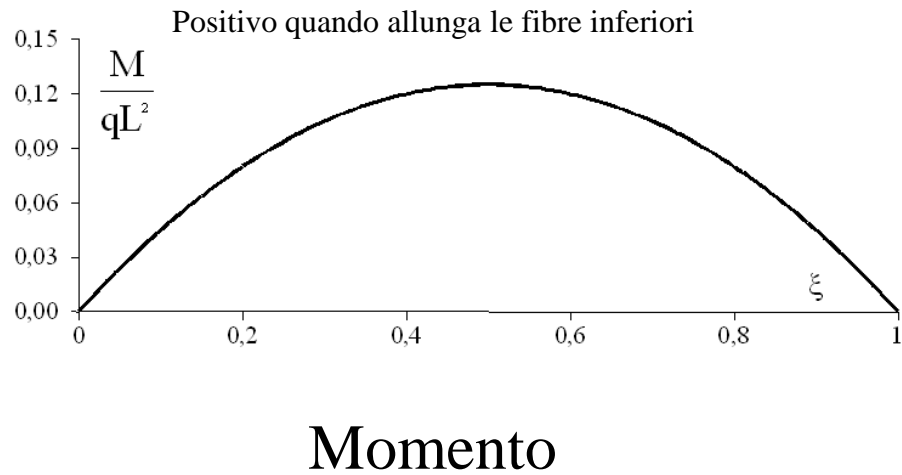
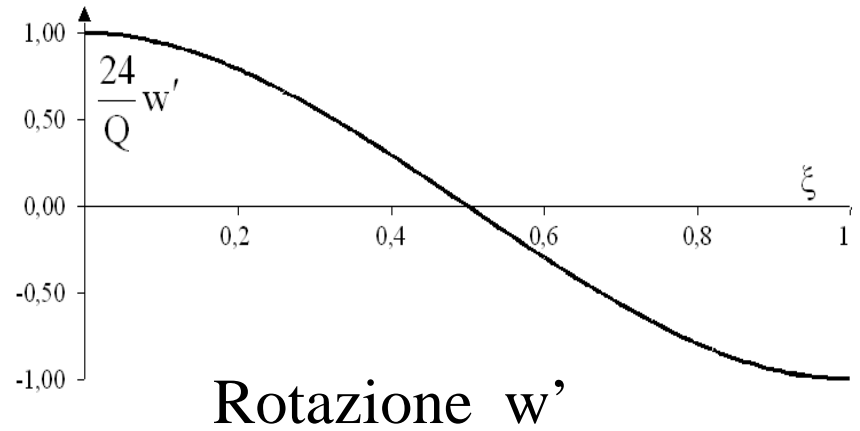
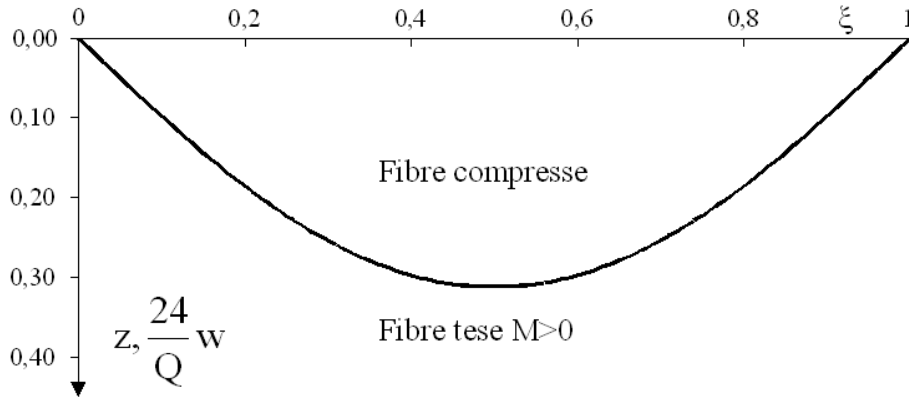
$$\begin{cases} w(0) = 0 \Rightarrow a = 0 \\ w(L) = 0 \Rightarrow b = \frac{qL^3}{24EI} \end{cases}$$

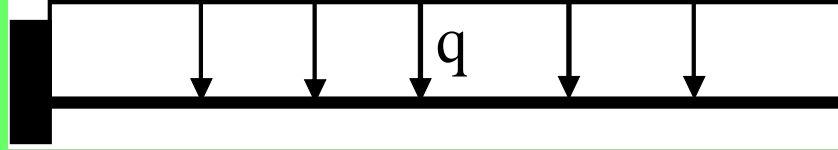
$$\begin{cases} w = \frac{qL^4}{24EI} \left[ \frac{x}{L} - 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + \left( \frac{x}{L} \right)^4 \right] \\ \frac{dw}{dx} = \frac{qL^3}{24EI} \left[ 1 - 6 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + 4 \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right] \end{cases}$$



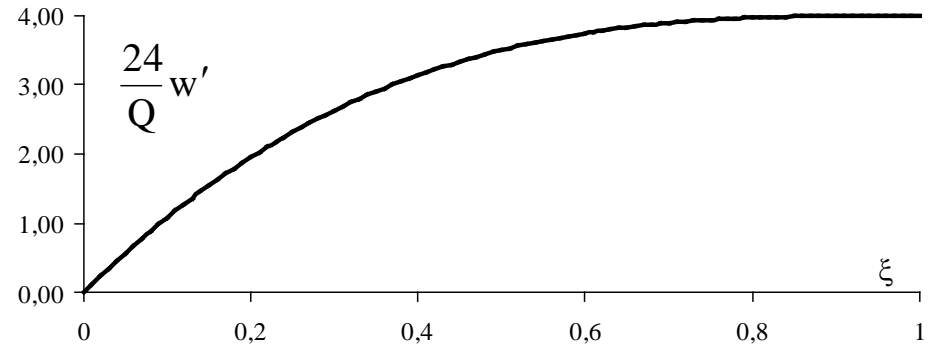
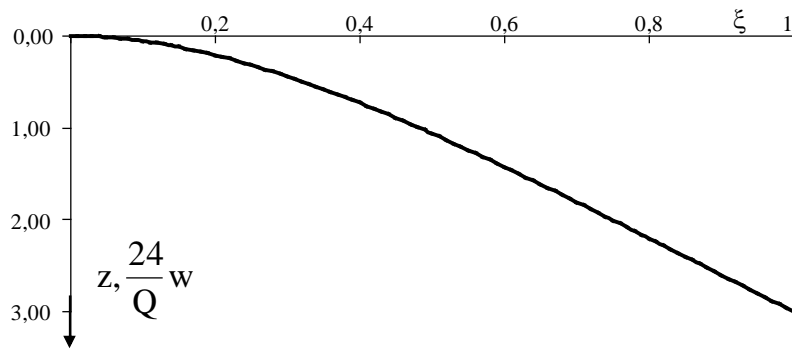


Deformata  $w$



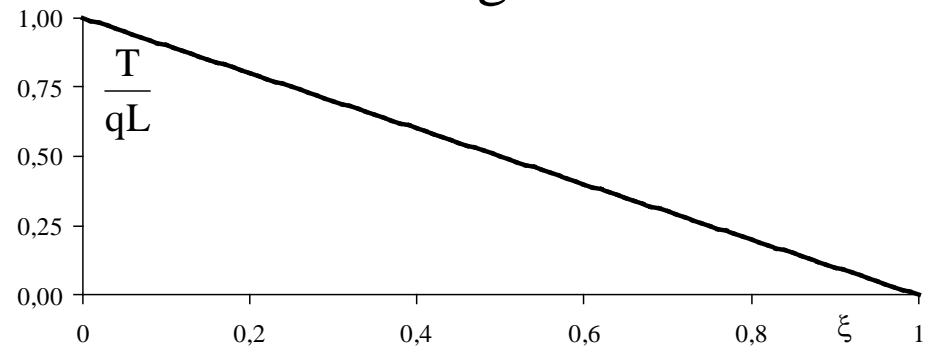


Deformata  $w$

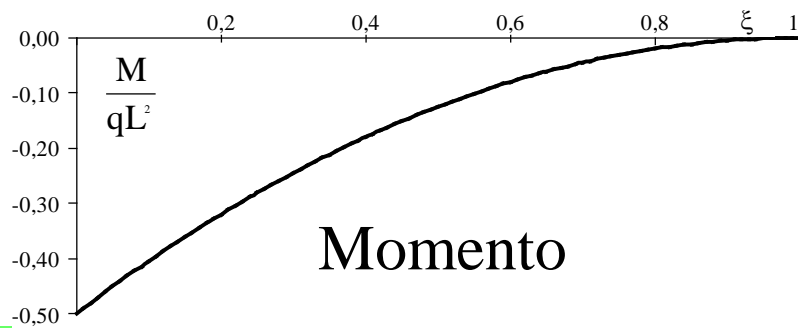


Rotazione  $w'$

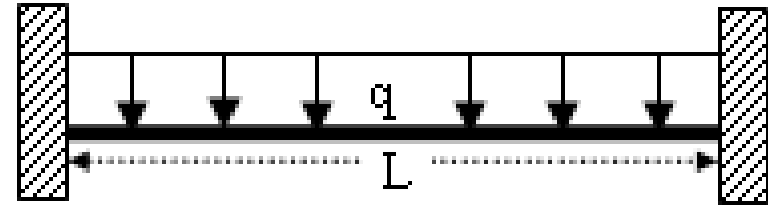
Taglio



Momento



# Modello del 4° ordine



$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q$$

$$\xi = \frac{x}{L} \quad ; \quad [ \quad ]' = \frac{d[ \quad ]}{d\xi} \quad ; \quad Q = \frac{qL^4}{EI}$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q}{EI} \Rightarrow \frac{d^4 w}{d\xi^4} = \frac{qL^4}{EI} \Rightarrow w'''' = Q$$

$$w = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 + \frac{Q}{24}\xi^4 \quad ; \quad w' = b + 2c\xi + 3d\xi^2 + 4\frac{Q}{24}\xi^3$$

$$w'' = 2c + 6d\xi + \frac{Q}{2}\xi^2 \quad ; \quad w''' = 6d + Q\xi$$

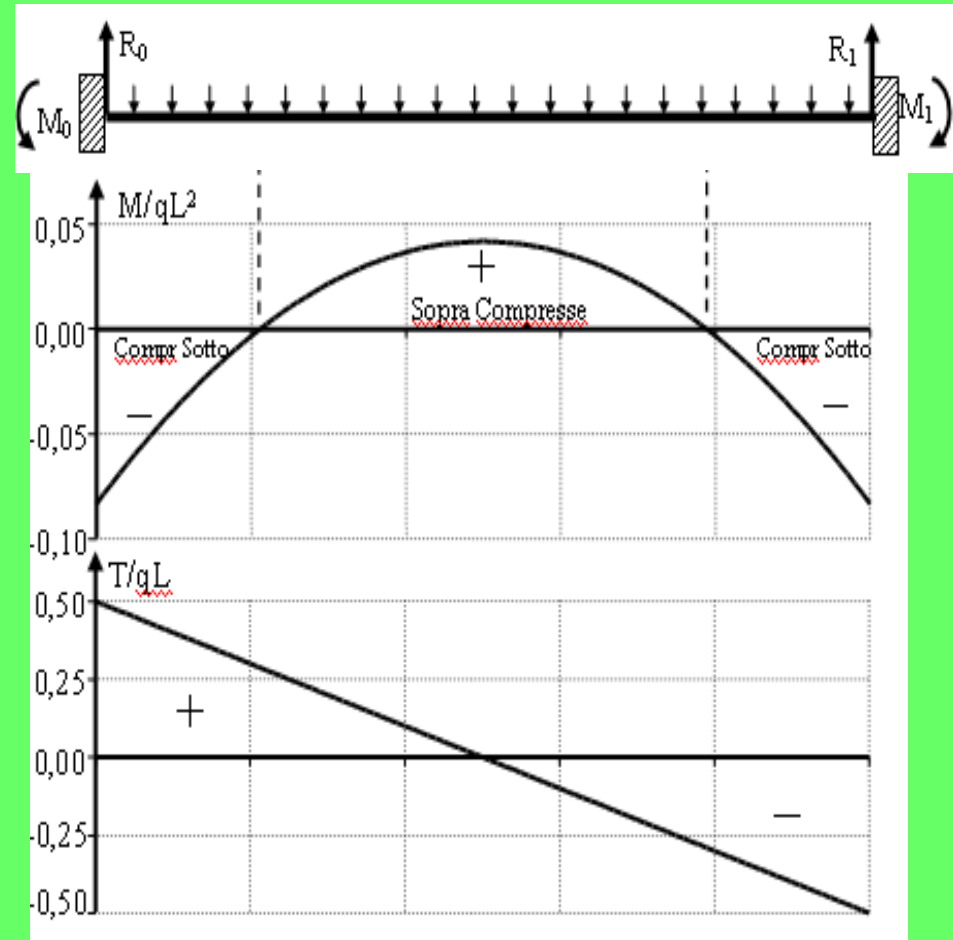
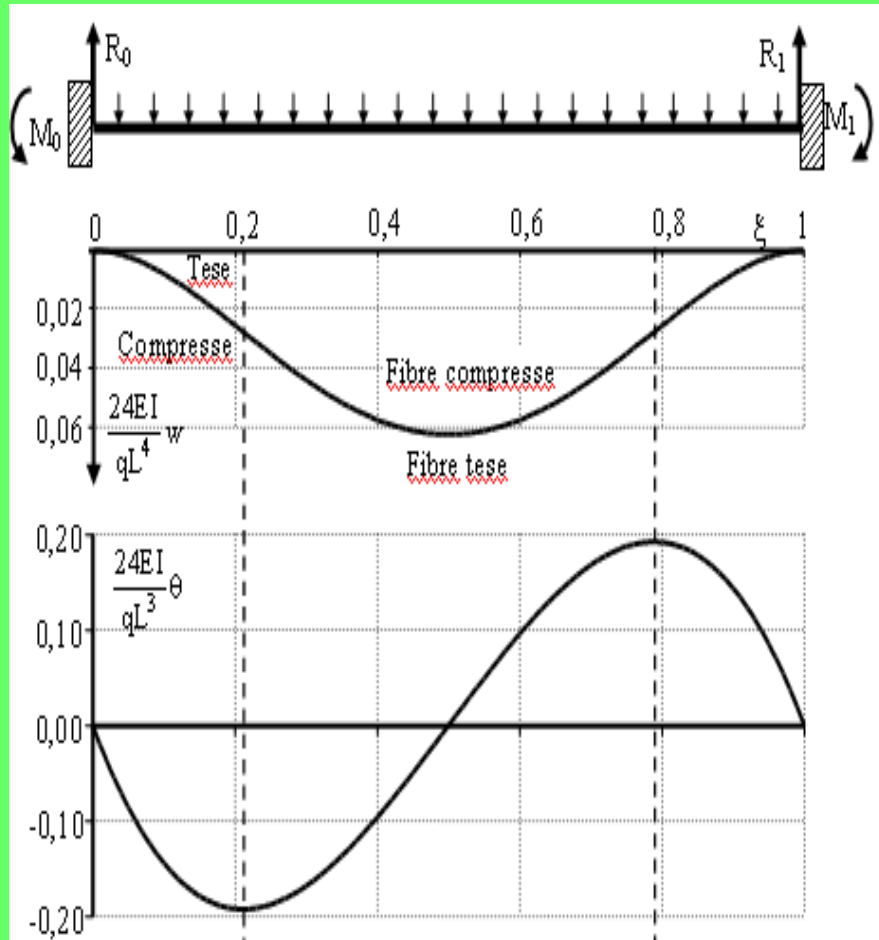
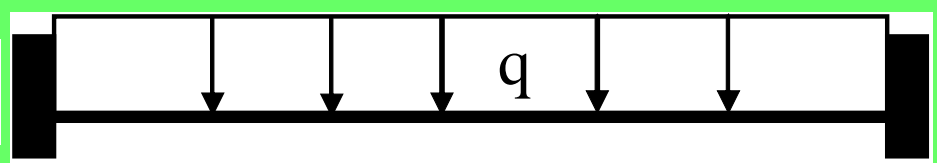
$$w(0) = 0 \Rightarrow a = 0 \quad ; \quad w'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$w(1) = w'(1) = 0 \Rightarrow d = -Q/12 \quad ; \quad c = Q/24$$

$$\begin{cases} w = \frac{qL^4}{24EI} [\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4] \\ \theta = -\frac{dw}{dx} = -\frac{w'}{L} = -\frac{qL^3}{24EI} [2\xi - 6\xi^2 + 4\xi^3] \end{cases}$$

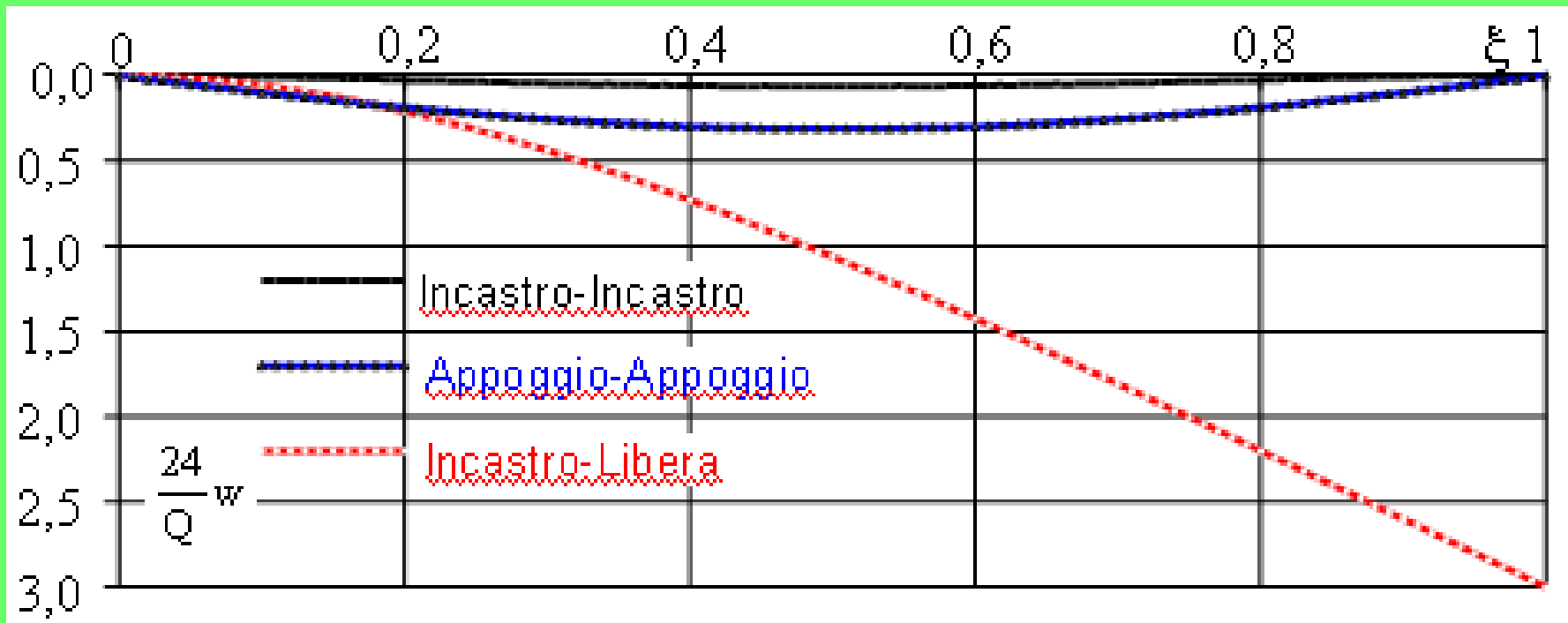
$$\begin{cases} M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{EI}{L^2} w'' = -\frac{qL^2}{2} \left[ \frac{1}{6} - \xi + \xi^2 \right] \\ T = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = -\frac{EI}{L^3} w''' = \frac{qL}{2} [1 - 2\xi] \end{cases}$$

# Trave incastrata ai due estremi:

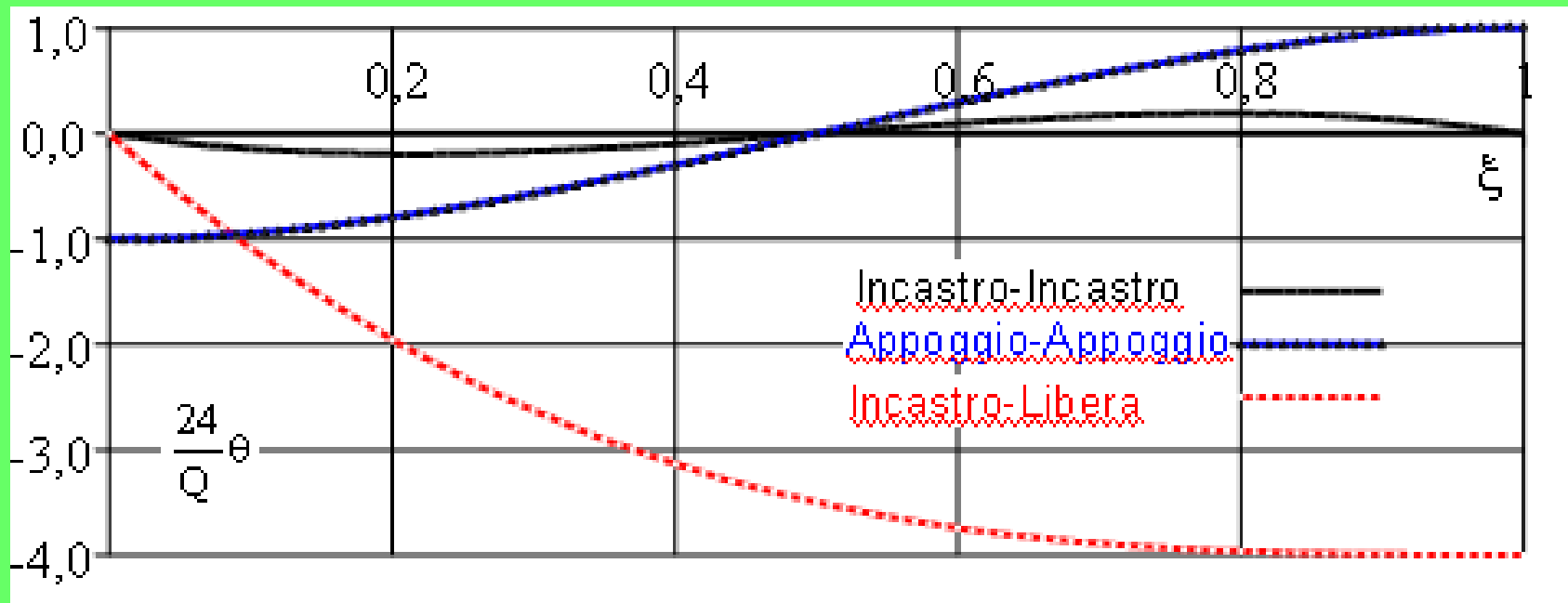




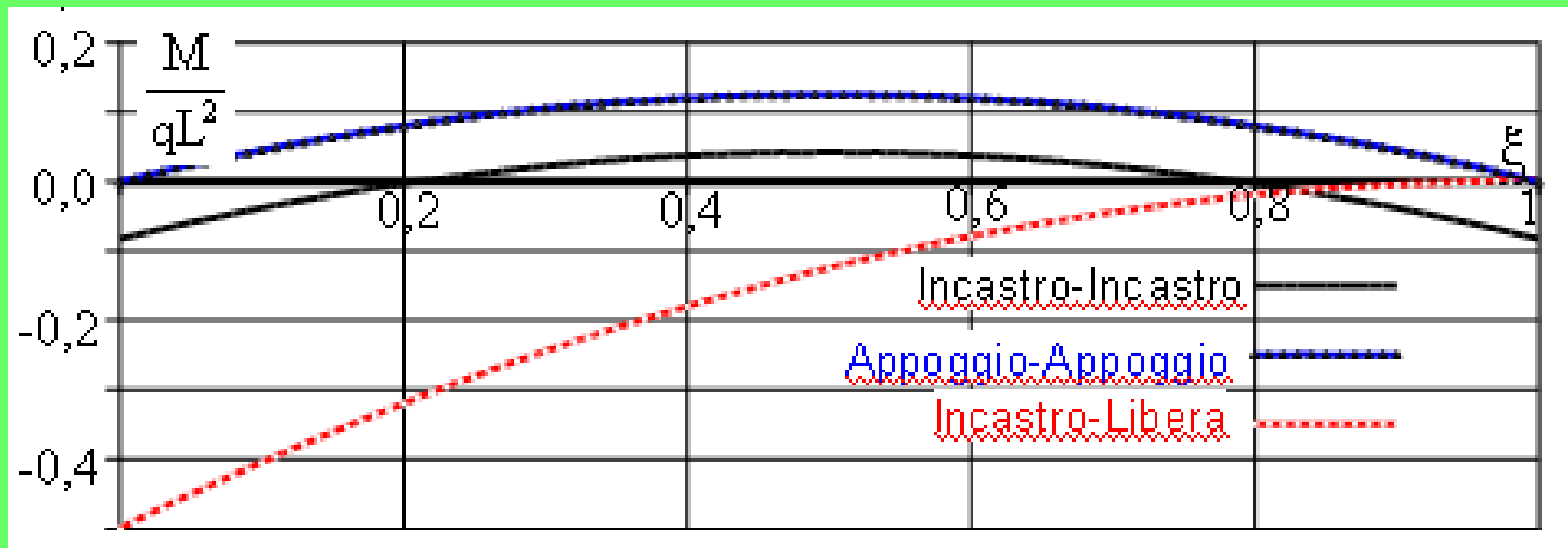
# Spostamento al variare dei Vincoli



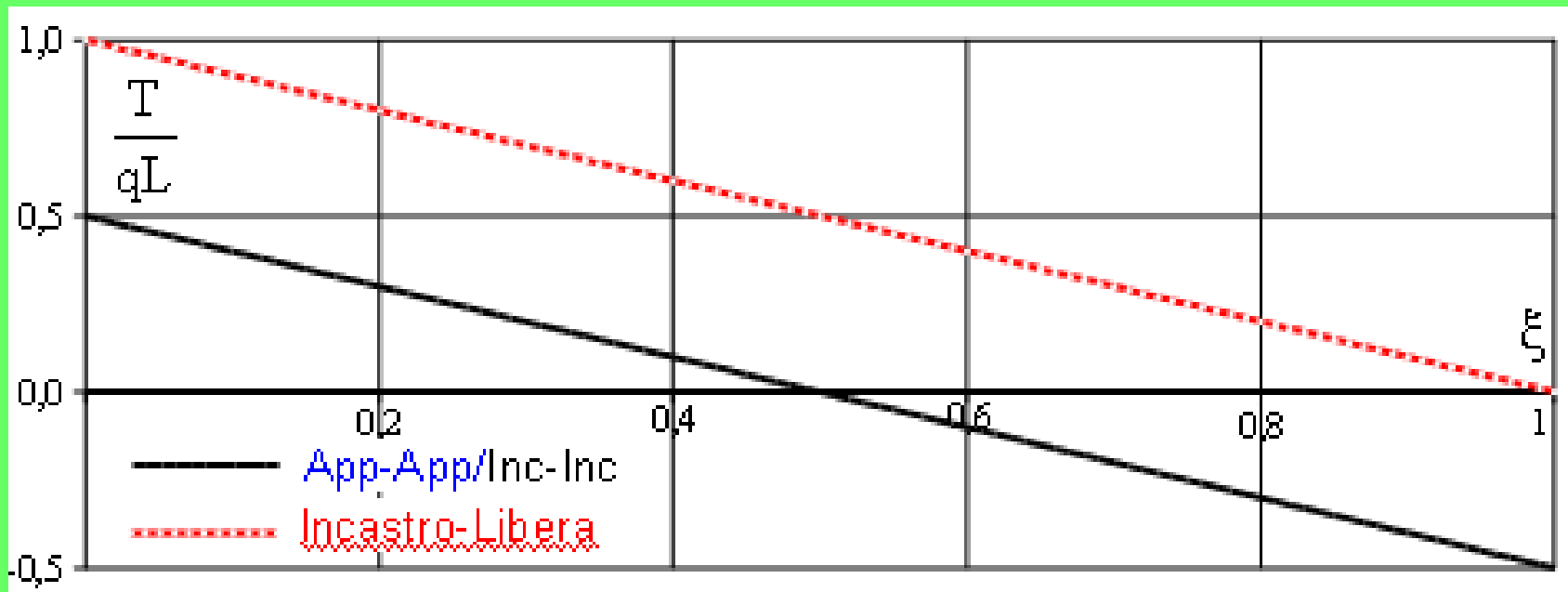
# Rotazione al variare dei Vincoli



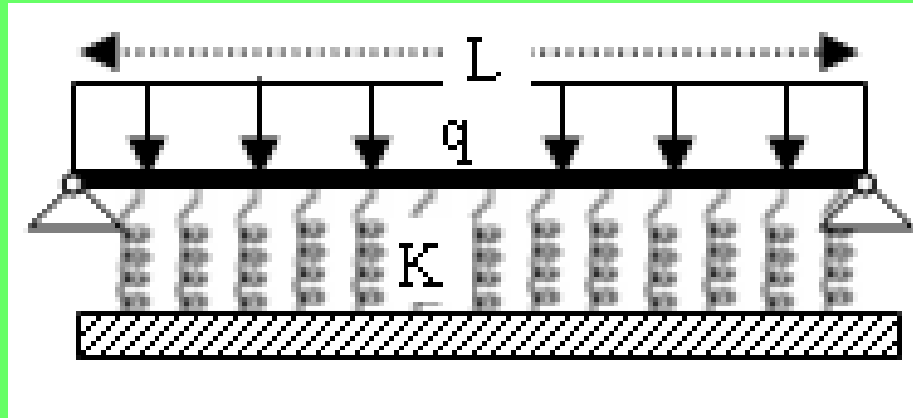
# Momento al variare dei Vincoli



# Taglio al variare dei Vincoli



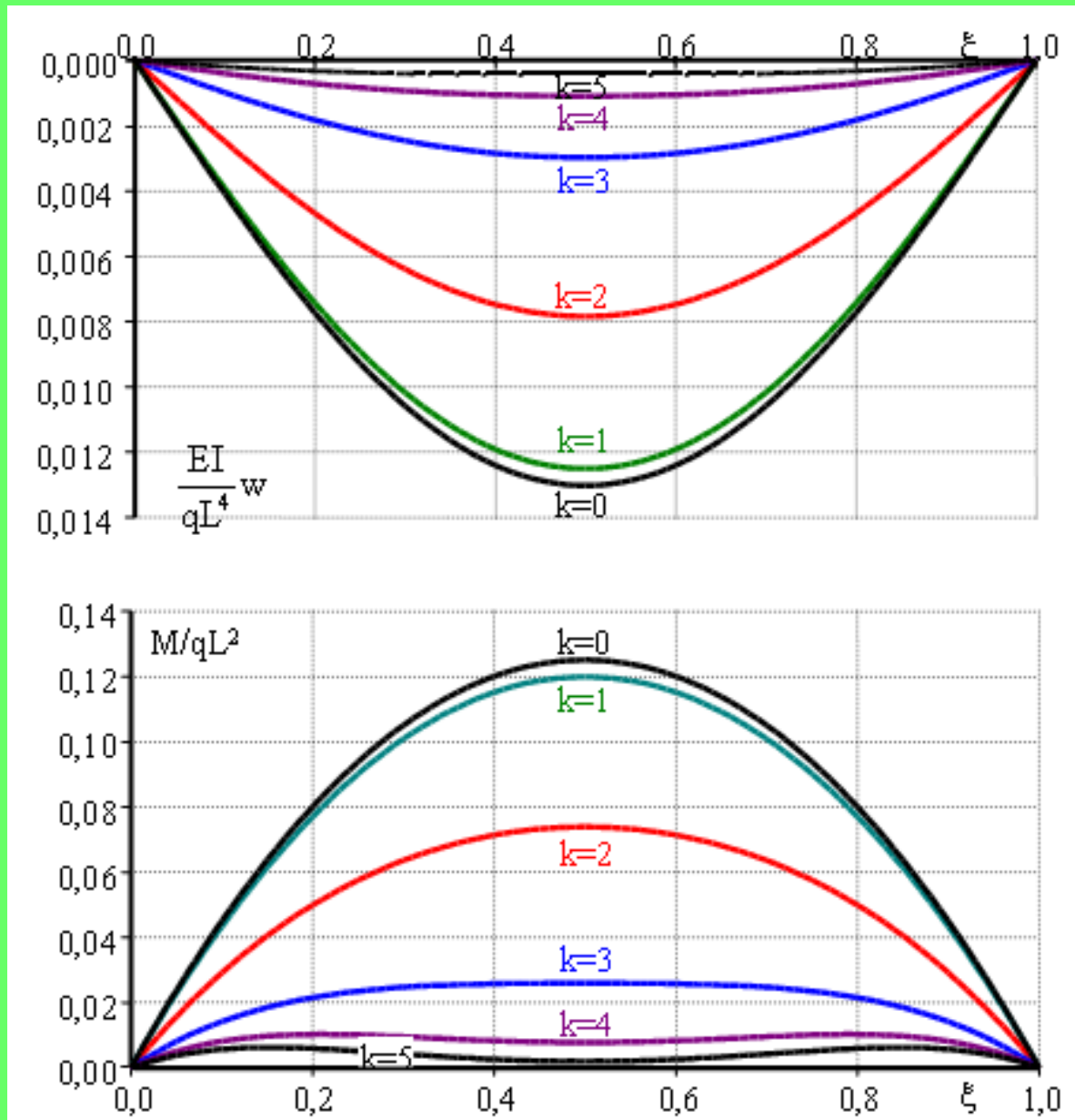
# Trave su suolo elastico



$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + Kw = q \Rightarrow w'''' + 4k^4 w = Q$$

$$w = \frac{qL^4}{4EI k^4} \left[ 1 - \frac{\text{Cosh}[k\xi] \cos[k(\xi - 1)] + \text{Cosh}[k(\xi - 1)] \cos[k\xi]}{\text{Cosh}(k) + \cos(k)} \right]$$

# Trave su suolo elastico Soluzione esatta



# Metodo di Ritz

## B)-Soluzione **approssimata** della trave inflessa

**B1)**–Il metodo di **Ritz (funzionale)**:

$$(1) \quad E_M = \int_0^L F(x, w, w'') dx = \text{Extr}$$

con c.e. sulle variabili **cinematiche**:

$$\bar{B}(w) = \bar{B}^*$$

**Si assume:**

$$(2) \quad w(x) = \psi_0(x) + \sum_{n=1}^N c_n \psi_n(x)$$

con le  $\psi_n$  tali che:

$$\bar{B}(\psi_0) = \bar{B}^* \quad ; \quad \bar{B}(\psi_m) = 0$$

per cui la (2) soddisfa la condizioni agli estremi. Rimane da soddisfare la (1) che, dopo integrazione, diventa una funzione:

$$E = E(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots, c_N) = \text{estremo}$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad [A]\{C\} = \{F\}$$



# Trave su suolo elastico: M. Ritz

$$E = \int_0^L \left[ \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + \frac{K}{2} w^2 - qw \right] dx = L \int_0^1 \left[ \frac{EI}{2L^4} \left( \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right)^2 + \frac{K}{2} w^2 - qw \right] d\xi$$

$$\xi = \frac{x}{L} \quad ; \quad [\ ]' = \frac{d[\ ]}{d\xi} \quad ; \quad k^4 = \frac{KL^4}{4EI} \quad ; \quad Q = \frac{qL^4}{EI}$$

$$E = \frac{1}{2} \int_0^1 w''^2 d\xi + 2k^4 \int_0^1 w^2 d\xi - Q \int_0^1 w d\xi \quad ; \quad w(0) = 0 \quad ; \quad w(1) = 0$$

$$w = \sum_{n=0}^N c_n \xi^n$$

# Trave su suolo elastico: M. Ritz (Serie di potenze)

**A1)**–Le c.e. sono due, il numero minimo di termini da considerare sono tre:

$$w = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 \quad ; \quad \begin{cases} w(0) = 0 & \Rightarrow c_0 = 0 \\ w(1) = 0 & \Rightarrow c_1 = -c_2 \end{cases}$$

$$w = c_2(\xi^2 - \xi) \quad ; \quad w' = c_2(2\xi - 1) \quad ; \quad w'' = 2c_2$$

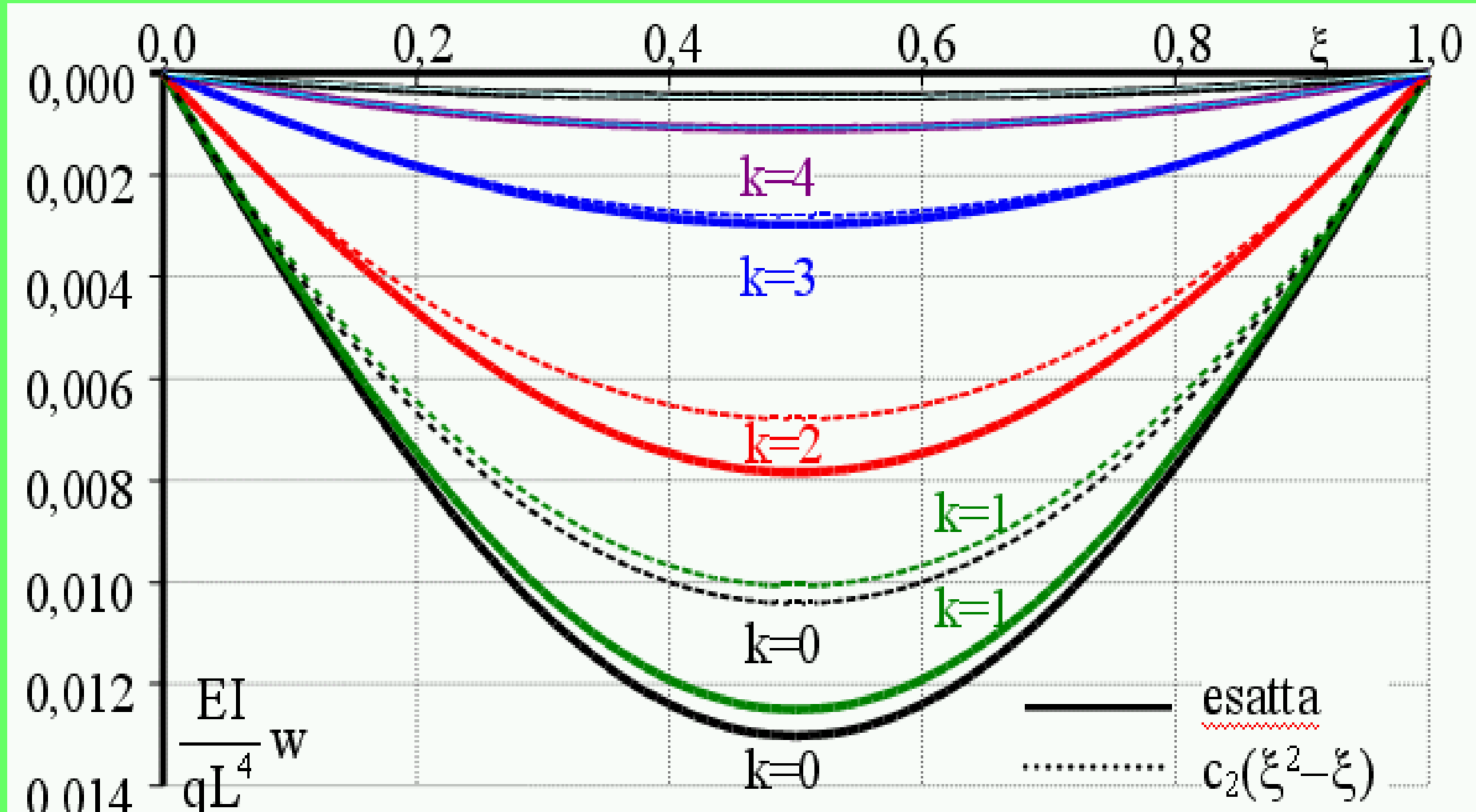
$$E = 2c_2^2 \int_0^1 d\xi + 2k^4 c_2^2 \int_0^1 (\xi^2 - \xi)^2 d\xi - Qc_2 \int_0^1 (\xi^2 - \xi) d\xi = 2c_2^2 + \frac{k^4 c_2^2}{15} + \frac{Qc_2}{6}$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_2} = c_2 \left[ 4 + \frac{2k^4}{15} \right] + \frac{Q}{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{Q}{12} \left[ \frac{15}{30 + k^4} \right]$$

$$w = -\frac{qL^4}{12EI} \left[ \frac{15}{30 + k^4} \right] (\xi^2 - \xi)$$

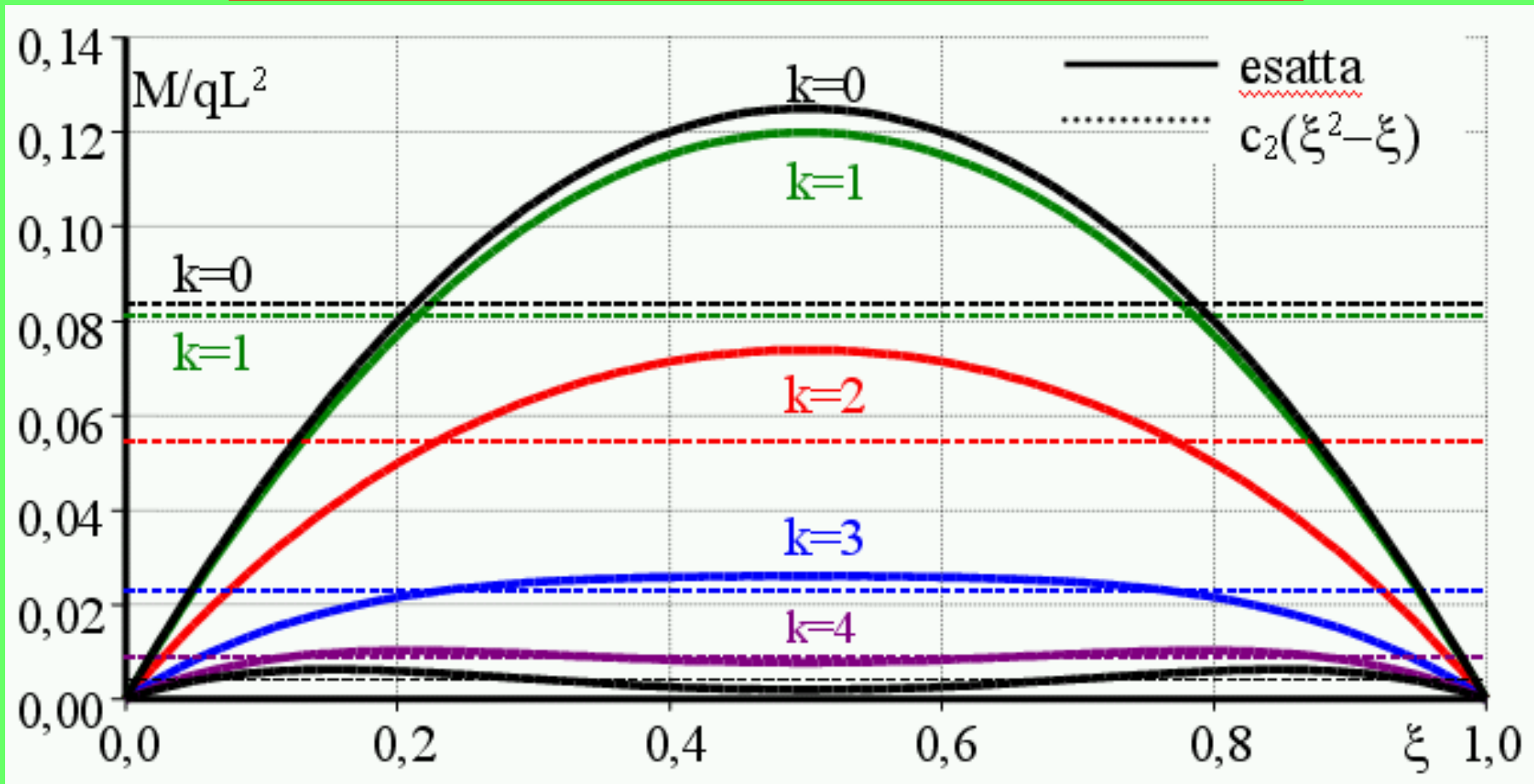
# Trave su suolo elastico: M. Ritz

$$w = -\frac{qL^4}{12EI} \left[ \frac{15}{30+k^4} \right] (\xi^2 - \xi)$$



# Trave su suolo elastico: M. Ritz

$$M = -\frac{EI}{L^2} w'' = \frac{qL^2}{2} \left[ \frac{5}{30+k^4} \right] ; \quad T = \frac{dM}{dx} = 0$$



# Trave su suolo elastico: M. Ritz

A2)–Numero di termini considerati tre:

$$w = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 \quad ; \quad \begin{cases} w(0) = 0 & \Rightarrow c_0 = 0 \\ w(1) = 0 & \Rightarrow c_1 = -c_2 - c_3 \end{cases}$$

$$w = c_2(\xi^2 - \xi) + c_3(\xi^3 - \xi)$$

Possibilità per calcolo dei due coefficienti:

a)–soddisfare una delle condizioni agli estremi sulle “forze”;

$$w = -\frac{qL^4}{16EI} \left[ \frac{105}{315 + 8k^4} \right] (\xi^3 - \xi)$$

b)–ricavare i coefficienti nell’imporre la stazionarietà dell’energia.

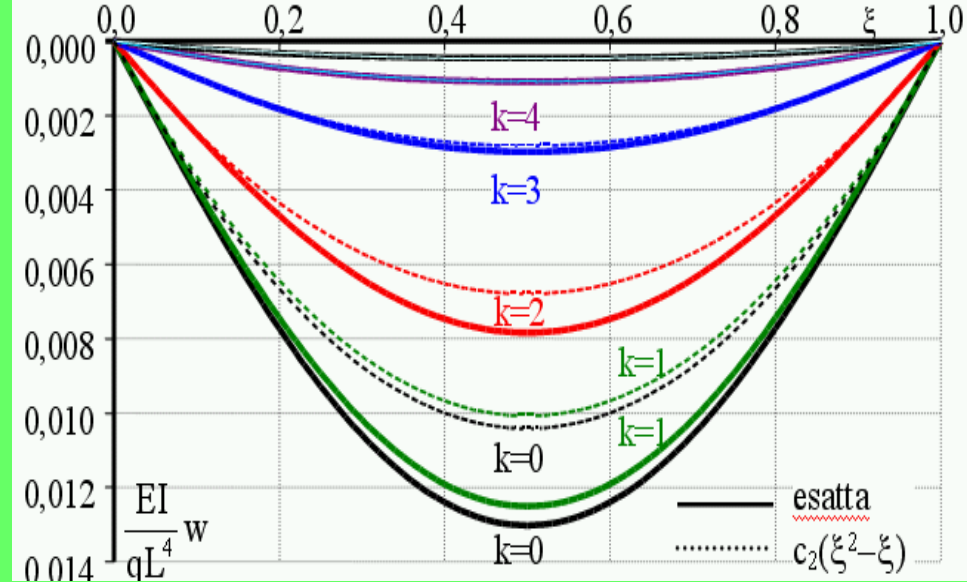
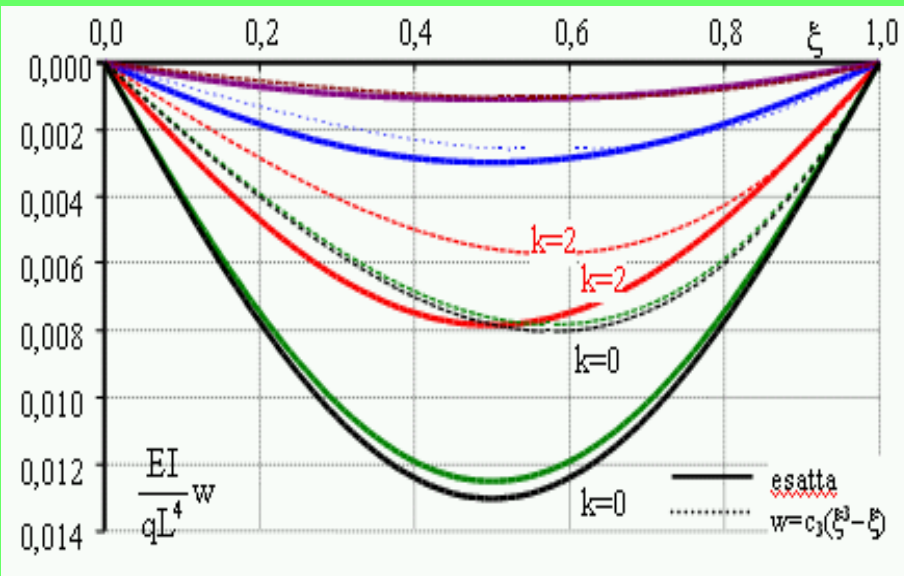
$$w = -\frac{qL^4}{12EI} \left[ \frac{15}{30 + k^4} \right] (\xi^2 - \xi)$$

≡ caso 2 coefficienti

# Trave su suolo elastico: M. Ritz

$$w = -\frac{qL^4}{16EI} \left[ \frac{105}{315 + 8k^4} \right] (\xi^3 - \xi)$$

$$w = -\frac{qL^4}{12EI} \left[ \frac{15}{30 + k^4} \right] (\xi^2 - \xi)$$



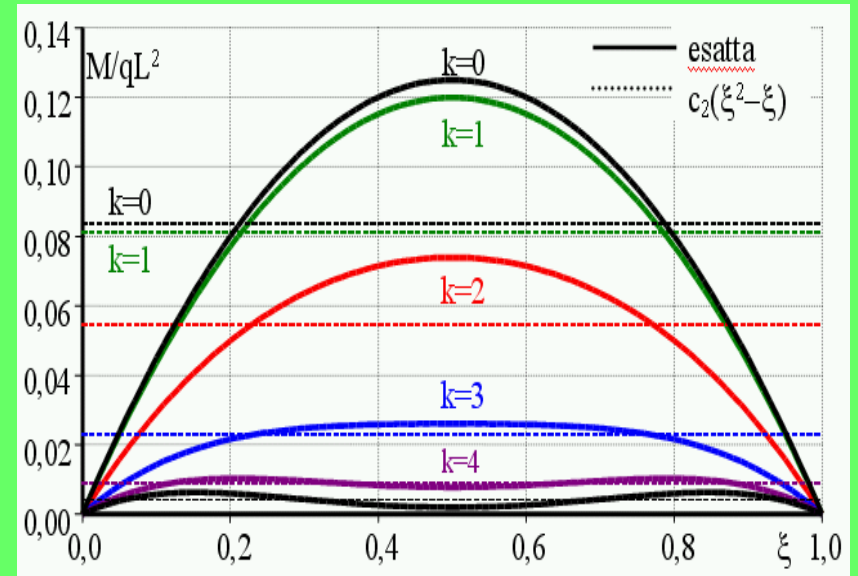
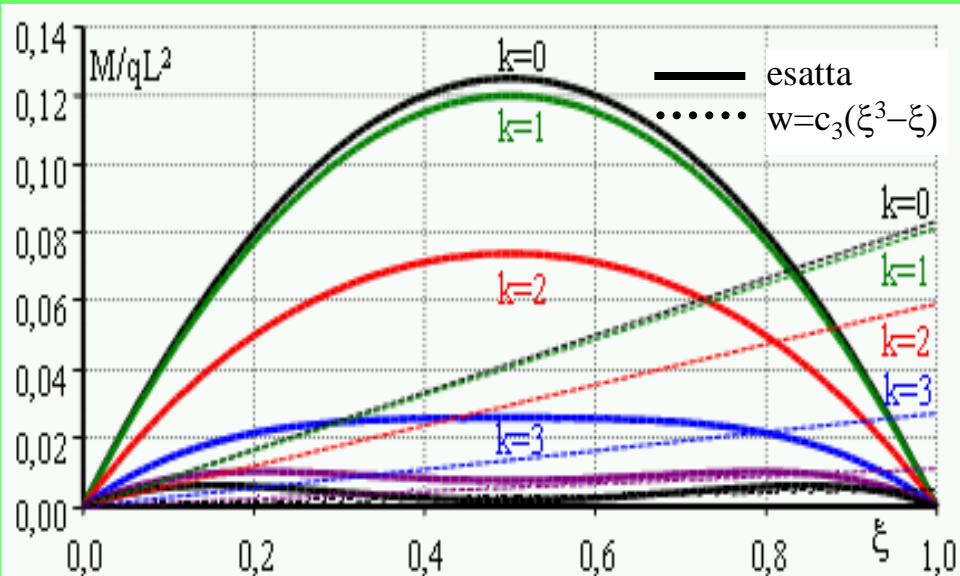
1 condizione sulle forze  
Soluzione peggiore  
poiche' violazione della  
'simmetria' del  
problema

Minimizzazione della  
'funzione' energia con 2  
coeff. variabili

# Trave su suolo elastico: M. Ritz

$$w = -\frac{qL^4}{16EI} \left[ \frac{105}{315 + 8k^4} \right] (\xi^3 - \xi)$$

$$w = -\frac{qL^4}{12EI} \left[ \frac{15}{30 + k^4} \right] (\xi^2 - \xi)$$



Male taglio e momento

## Trave su suolo elastico: M. Ritz

**A3)**–Numero di termini considerati quattro:

$$w = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 + c_4\xi^4 ; \begin{cases} w(0) = 0 & \Rightarrow c_0 = 0 \\ w(1) = 0 & \Rightarrow c_1 = -c_2 - c_3 - c_4 \end{cases}$$

$$w = c_2(\xi^2 - \xi) + c_3(\xi^3 - \xi) + c_4(\xi^4 - \xi)$$

Possibilità per calcolo dei due coefficienti:

a)–soddisfare le due condizioni agli estremi sulle “forze”;

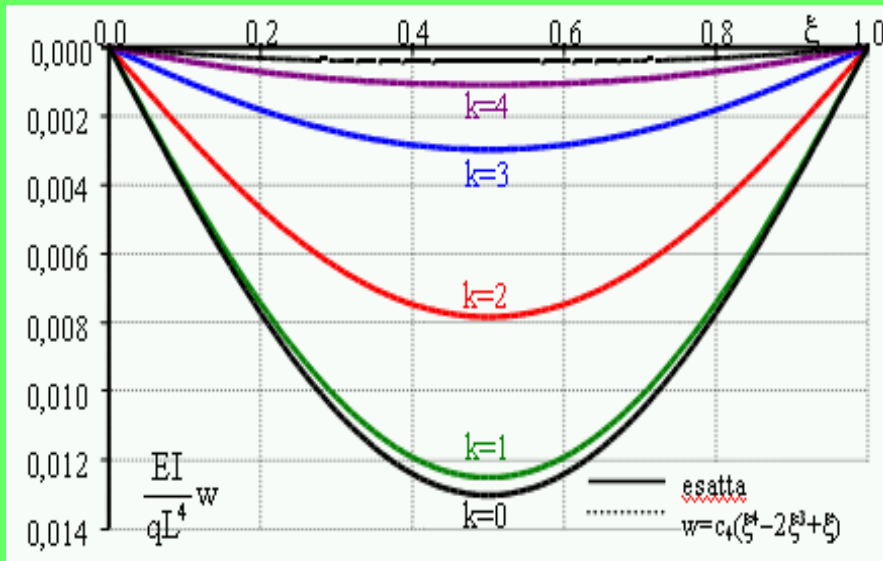
$$w = \frac{qL^4}{2EI} \left[ \frac{63}{756 + 31k^4} \right] (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi)$$

b)–ricavare i coefficienti nell'imporre la stazionarietà dell'energia.

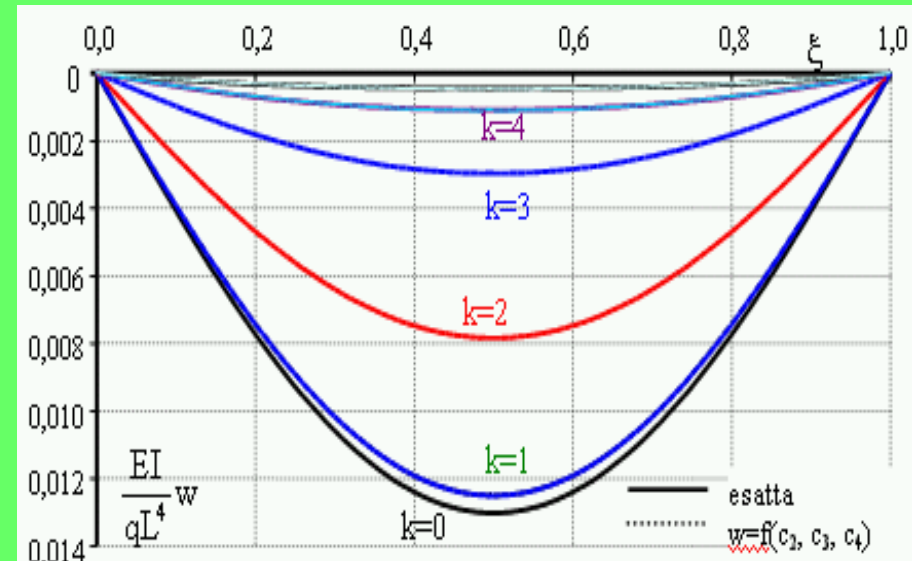


# Trave su suolo elastico: M. Ritz

$$w = \frac{qL^4}{2EI} \left[ \frac{63}{756 + 31k^4} \right] (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi)$$



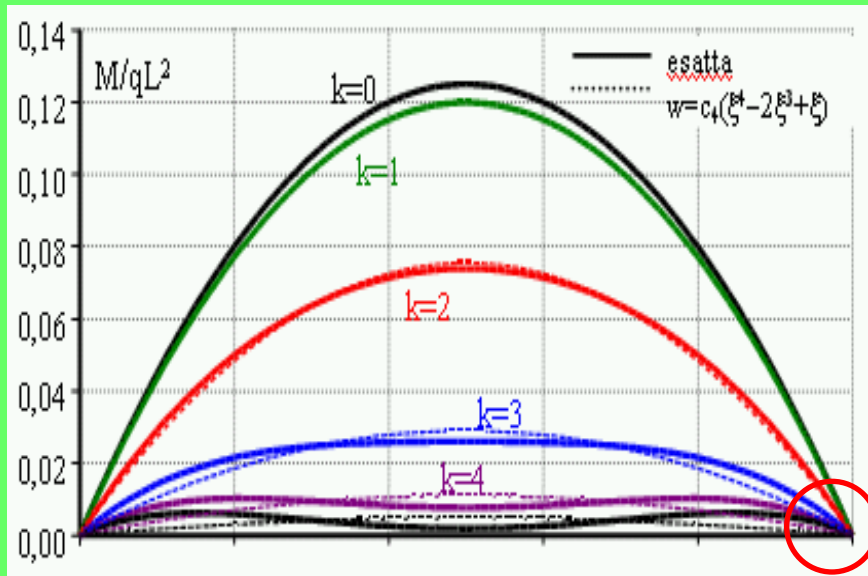
4 Condizioni al contorno



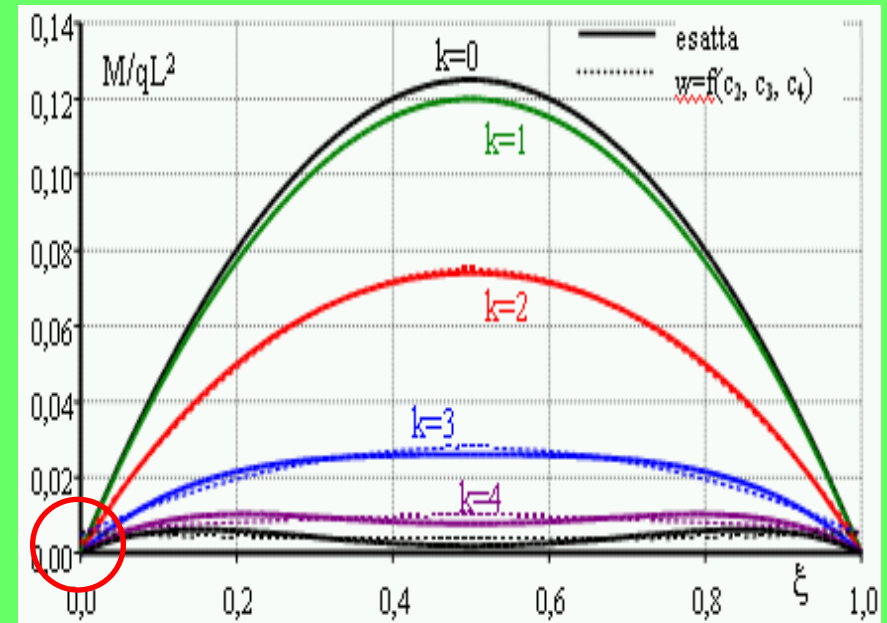
Full Stazionaria

# Trave su suolo elastico: M. Ritz

$$w = \frac{qL^4}{2EI} \left[ \frac{63}{756 + 31k^4} \right] (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi)$$



Le condizioni al contorno sono soddisfatte in maniera esatta

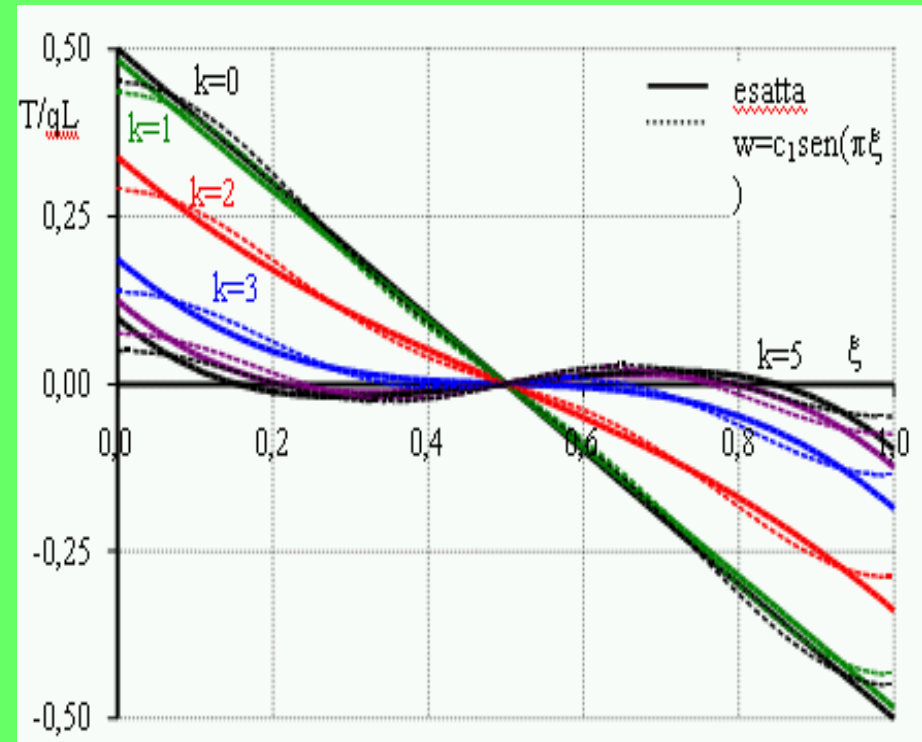
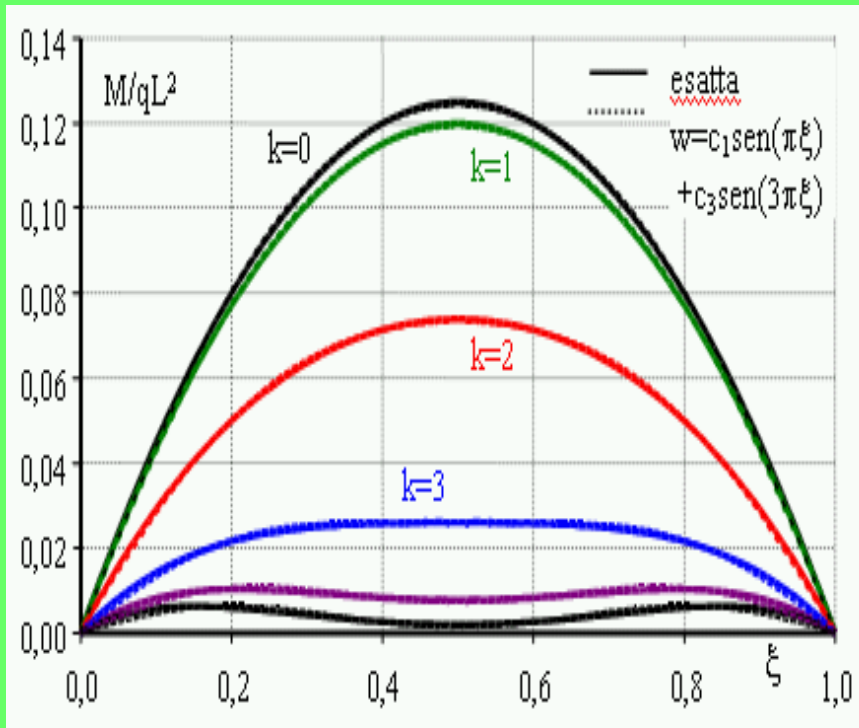


Le condizioni al contorno sono soddisfatte in maniera approssimata

# Trave su suolo elastico: M. Ritz (Serie trigonometrica)

$$w = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n = \sum_{n=1}^N c_n \text{sen}(n\pi\xi)$$

$$w = \frac{qL^4}{EI} \sum_{n=1,3,\dots}^N \frac{4}{n\pi[(n\pi)^4 + 4k^4]} \text{sen}(n\pi\xi)$$



# Considerazioni sul metodo di Ritz

- 1)–Esaminare il problema per individuarne qualche proprietà che non deve essere alterata dall'espressione  $w(x)$  che approssima la soluzione.
- 2)–La  $w(x)$  scelta deve soddisfare le condizioni agli estremi sugli “spostamenti”.
- 3)–Anche se non indispensabile, la soluzione tende più rapidamente a quella esatta se la  $w(x)$  scelta soddisfa anche le condizioni agli estremi sugli “forze”, il cui ruolo è fondamentale nel calcolo del momento e del taglio.
- 4)–Se si conosce la soluzione di un problema analogo, con almeno le stesse condizioni geometriche agli estremi, come funzione che approssima la soluzione del problema in esame si può assumere l'espressione analitica nota, combinata con coefficienti da determinare.
- 5)–Lo sviluppo in serie di potenze ha il vantaggio che le potenze sono integrabili in forma elementare; per avere risultati soddisfacenti anche su momento e taglio, il **grado del polinomio non deve essere inferiore al doppio dell'ordine di derivazione con cui la funzione incognita compare nell'energia potenziale totale.**
- 6)–Lo sviluppo in serie di funzioni trigonometriche è una serie in genere più potente della serie di potenze; infatti a parità del numero di coefficienti  $c_n$ , una funzione trigonometrica è di per sé una serie di potenze.

# Metodo di Galeerkin

## B)-Soluzione approssimata della trave inflessa

**B2)**–Il metodo di Galerkin (Eq. differenziale):

$$(1) \quad L_{2M}(w) = q$$

con c.e. sulle variabili **cinematiche e cinetiche** :

$$B(w) = B^*$$

**Si assume:**

$$(2) \quad w(x) = \chi_0(x) + \sum_{n=1}^N c_n \chi_n(x)$$

con le  $\chi_n$  tali che:

$$B(\chi_0) = B^* \quad ; \quad B(\chi_m) = 0$$

per cui la (2) soddisfa la condizioni agli estremi. Rimane da soddisfare la (1) che si soddisfa “in media”

$$L_{2M}\left(\sum_{n=1}^N c_n \chi_n\right) = q - L_{2M}(\chi_0) \Rightarrow \sum_{n=1}^N c_n \int_0^L L_{2M}(\chi_n) \chi_m dx = \int_0^L [q - L_{2M}(\chi_0)] \chi_m dx \quad ; \quad m = 1, 2, \dots, N$$

**Calcolati gli integrali:**

$$\sum_{n=1}^N c_n \alpha_{nm} = g_m \quad ; \quad m = 1, 2, \dots, N \quad \Rightarrow \quad [B]\{C\} = \{F\}$$

# Trave su suolo elastico: M. Galeerkin

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4k^4 w = Q \quad ; \quad \begin{cases} w(0) = 0 & ; & w(1) = 0 \\ w''(0) = 0 & ; & w''(1) = 0 \end{cases}$$

$$w = \sum_{n=0}^N c_n \xi^n$$

**dove  $N \geq 4$  perché 4 coeff. servono per le 4 c.e. ed 1 per soddisfare l'equazione nel campo.**

$$w = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + c_3 \xi^3 + c_4 \xi^4$$

$$\begin{cases} w(0) = 0 & \Rightarrow & c_0 = 0 \\ w(1) = 0 & \Rightarrow & c_1 = -c_2 - c_3 - c_4 \end{cases}$$

$$w''(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$w''(1) = 0 \Rightarrow c_3 = -2c_4$$

$$w = c_4 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \equiv c_4 \varphi(\xi) \quad \text{con } \varphi = \xi^4 - 2\xi^3 + \xi$$

$$24c_4 + 4k^4 c_4 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) = Q$$

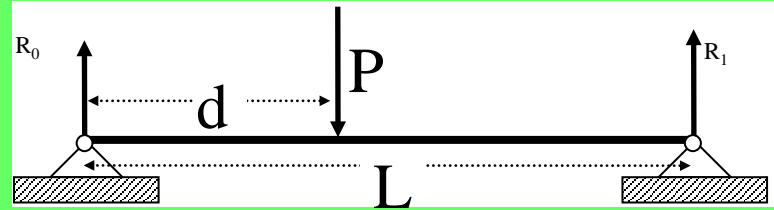
$$24c_4 \int_0^1 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) d\xi + 4k^4 c_4 \int_0^1 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi)^2 d\xi = Q \int_0^1 (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) d\xi$$

$$w = \frac{qL^4}{2EI} \left[ \frac{63}{756 + 31k^4} \right] (\xi^4 - 2\xi^3 + \xi)$$

Stesso di Ritz

# Trave con carichi concentrati

$$\begin{cases} R_0 + R_1 = P \\ R_1 L - Pd = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_0 = P(1 - \eta) \\ R_1 = P\eta \end{cases}$$



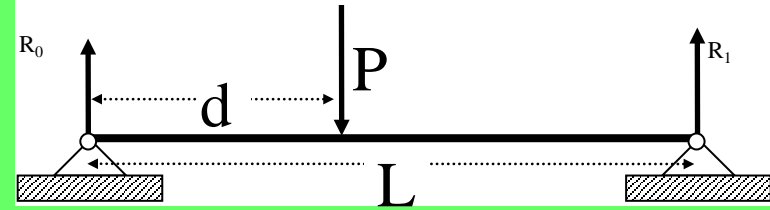
$$\begin{cases} T_S = R_0 = P(1 - \eta) & \text{per } 0 \leq \xi \leq \eta \\ T_D = R_0 - P = -P\eta & \text{per } \eta \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_S = \int_0^d T_S dx = L \int_0^\eta R_0 d\xi = PL(1 - \eta)\xi & \text{per } 0 \leq \xi \leq \eta \\ M_D = M_S(\eta) - PL(\xi - \eta) = PL(1 - \xi)\eta & \text{per } \eta \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 w_S}{d\xi^2} = -\frac{L^2 M_S}{EI} \Rightarrow w_S'' = -\frac{PL^3}{EI}(1 - \eta)\xi = -P^*(1 - \eta)\xi \\ \frac{d^2 w_D}{d\xi^2} = -\frac{L^2 M_D}{EI} \Rightarrow w_D'' = -\frac{PL^3}{EI}(1 - \xi)\eta = -P^*(1 - \xi)\eta \end{cases}$$



# Trave con carichi concentrati: modello 2° ordine



$$w''_S = -\frac{PL^3}{EI}(1-\eta)\xi = -P^*(1-\eta)\xi \quad ; \quad w''_D = -\frac{PL^3}{EI}(1-\xi)\eta = -P^*(1-\xi)\eta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w'_S = -\frac{P^*}{2}(1-\eta)\xi^2 + b \\ w_S = -\frac{P^*}{6}(1-\eta)\xi^3 + b\xi + a \end{array} \right. \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} w'_D = -\frac{P^*}{2}(2\xi - \xi^2)\eta + \beta \\ w_D = -\frac{P^*}{6}(3\xi^2 - \xi^3)\eta + \beta\xi + \alpha \end{array} \right.$$

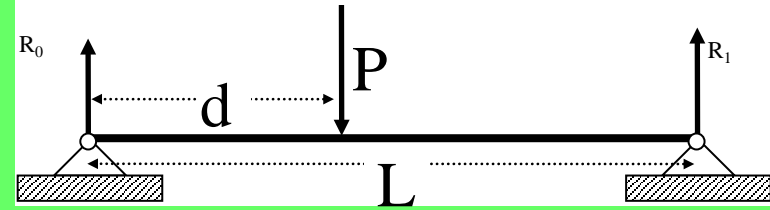
$$w_S(0) = 0 \quad ; \quad w_D(1) = 0$$

$$w_S(\eta) = w_D(\eta) \quad ; \quad w'_S(\eta) = w'_D(\eta)$$

$$w_S(\xi, \eta) = \frac{PL^3}{48EI} \left[ 8(2\eta - 3\eta^2 + \eta^3)\xi - 8(1-\eta)\xi^3 \right]$$

$$w_D(\xi, \eta) = \frac{PL^3}{48EI} \left[ 8(2\xi - 3\xi^2 + \xi^3)\eta - 8(1-\xi)\eta^3 \right]$$

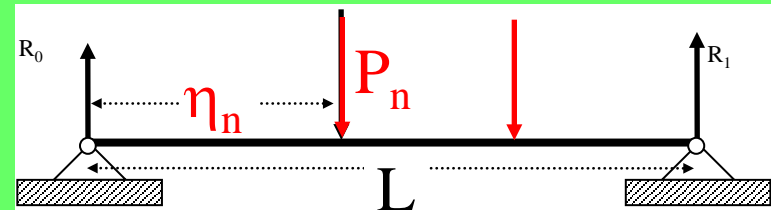
# La funzione di influenza (Green)



$$G(\xi, \eta) = \begin{cases} \frac{L^3}{48EI} \left[ 8(2\eta - 3\eta^2 + \eta^3)\xi - 8(1 - \eta)\xi^3 \right] & \text{per } 0 \leq \xi \leq \eta \\ \frac{L^3}{48EI} \left[ 8(2\xi - 3\xi^2 + \xi^3)\eta - 8(1 - \xi)\eta^3 \right] & \text{per } \eta \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

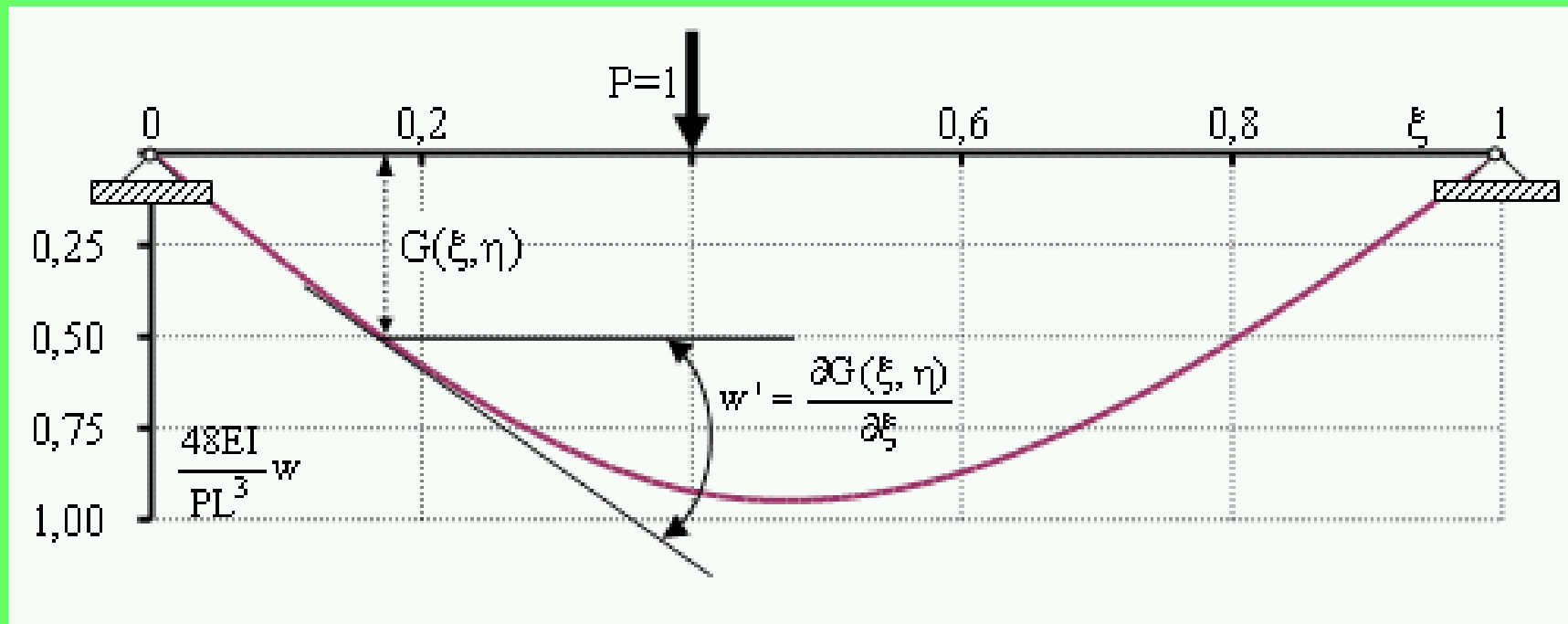
$$w(\xi) = \sum_{n=1}^N P_n G(\xi, \eta_n)$$

$$w(\xi) = \int_0^L q(\eta) G(\xi, \eta) d\eta$$



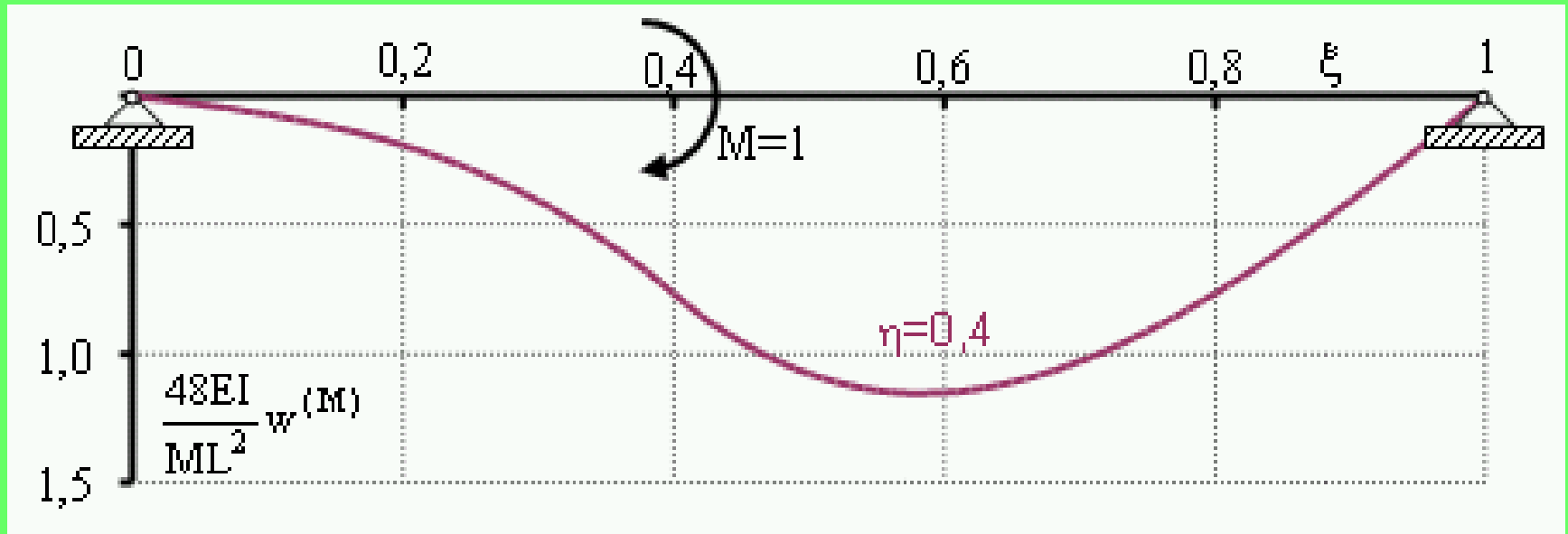
# Rotazione in $\xi$ provocata dal carico $P=1$ in $\eta$ :

$$\theta(\xi, \eta) = -\frac{w'}{L} = -\frac{\partial G}{\partial \xi} = \begin{cases} \theta_S = -\frac{L^2}{48EI} \left[ 8(2\eta - 3\eta^2 + \eta^3) - 24(1-\eta)\xi^2 \right] \\ \theta_D = -\frac{L^2}{48EI} \left[ 8(2 - 6\xi + 3\xi^2)\eta + 8\eta^3 \right] \end{cases}$$



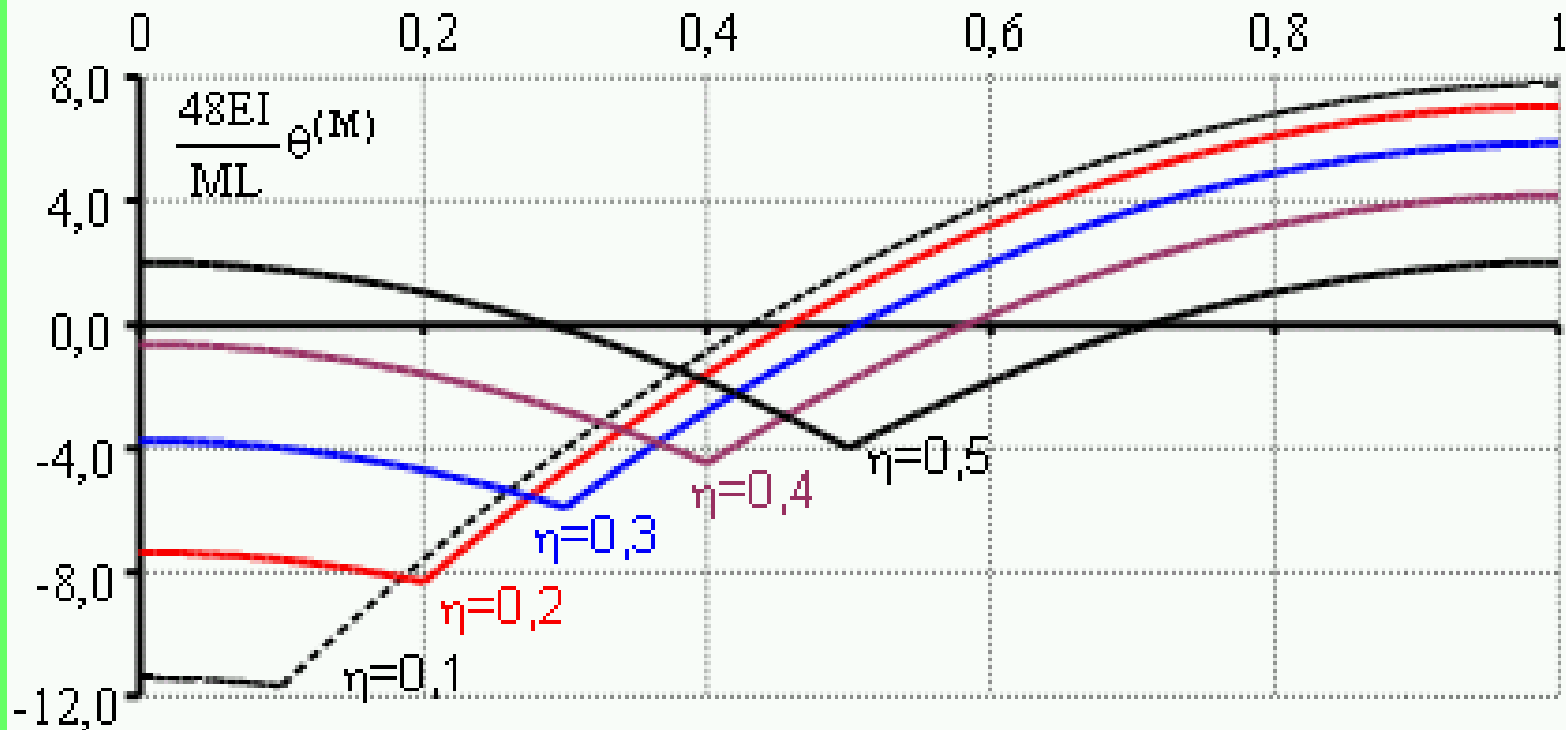
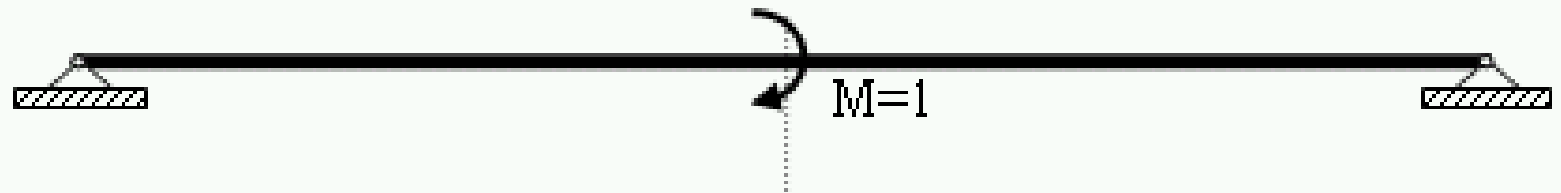
Lo spostamento in  $\xi$  provocato dal momento  $M=1$  in  $\eta$

$$w^{(M)}(\xi, \eta) = \frac{\partial G}{\partial \eta} = \begin{cases} w_S^{(M)} = \frac{L^2}{48EI} [8(2 - 6\eta + 3\eta^2)\xi + 8\xi^3] \\ w_D^{(M)} = \frac{L^2}{48EI} [8(2\xi - 3\xi^2 + \xi^3) - 24(1 - \xi)\eta^2] \end{cases}$$



La rotazione in  $\xi$  provocata dal momento  $M=1$  in  $\eta$

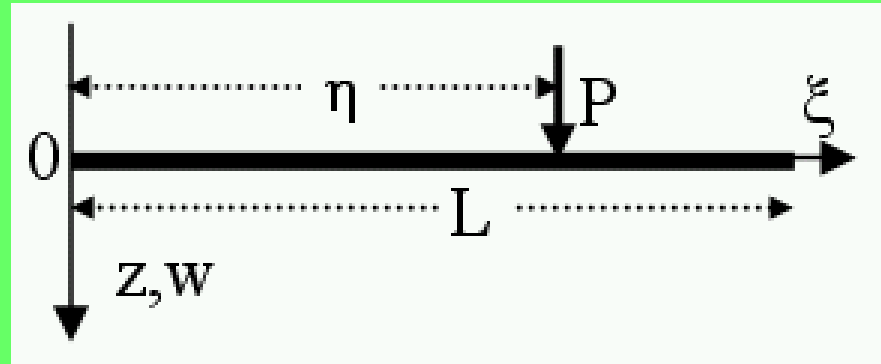
$$\theta^{(M)}(\xi, \eta) = -\frac{w'^{(M)}}{L} = -\frac{\partial G}{\partial \xi \partial \eta} = \begin{cases} \theta_S^{(M)} = -\frac{L}{48EI} [8(2 - 6\eta + 3\eta^2) + 24\xi^2] \\ \theta_D^{(M)} = -\frac{L}{48EI} [8(2 - 6\xi + 3\xi^2) + 24\eta^2] \end{cases}$$



# Trave con carichi concentrati: modello 4° ordine

$$EIw_S^{IV} = 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq \xi \leq \eta$$

$$EIw_D^{IV} = 0 \quad \text{per} \quad \eta \leq \xi \leq 1$$



$$w_S = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 \quad ; \quad w_D = \alpha + \beta\xi + \gamma\xi^2 + \delta\xi^3$$

$$\begin{cases} w_S(\eta) = w_D(\eta) \\ w'_S(\eta) = w'_D(\eta) \\ EIw''_S(\eta) = EIw''_D(\eta) \\ EIw'''_D(\eta) - EIw'''_S(\eta) = PL^3 \end{cases}$$

A free-body diagram of the beam at the point of application of the load  $P$ . The load  $P$  is shown as a downward arrow. The internal forces  $T_S$  and  $T_D$  are shown as upward and downward arrows, respectively, on either side of the load.

$$T_S = -EI \frac{d^2 w_S}{dx^2} \quad T_D = -EI \frac{d^2 w_D}{dx^2}$$