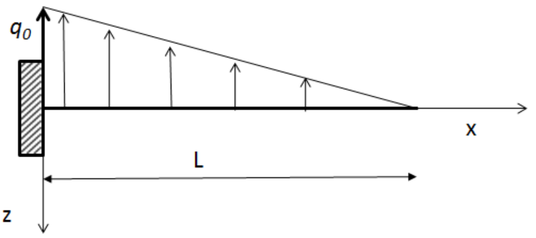
Costruzioni Aerospaziali - Esame 11 Aprile 2015

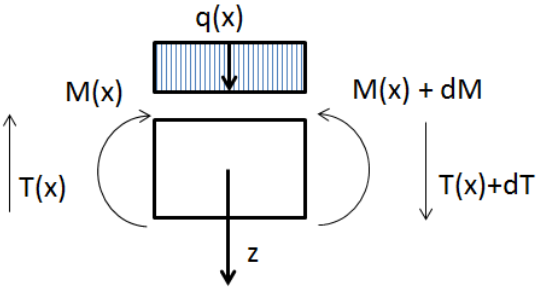
Cognome: .... Nome: .... Matr: ....

1. Una semiala, lunga L = 15m, è modellata come una trave in alluminio (E = 72GPa, Iy=3e-3m[4]) incastrata alla fusoliera in x=0m, come in figura. La sollecitazione che si vuole studiare è quella dovuta alla portanza, modellata come una distribuzione triangolare in cui il valore massimo è q_0= -30 kN/m in x = 0.



1a. Scrivere l'espressione **analitica** della distribuzione delle forze taglianti T(x) e dei momenti flettenti M(x) lungo l'asse x, disegnandone l'andamento e riportando il valore in x=0 e riportare i valori numerici in x=2/3L:

Se si ipotizza di prendere l'asse z positivo verso il basso, il bilancio delle forze e dei momenti del concio di trave:

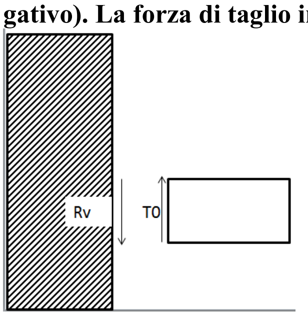


porta a: $\frac{dT}{dx} = -q(x)$ **e** $\frac{dM}{dx} = T(x)$

La q(x) vale q0 in x = 0 e 0 in x=L.

Dunque: $q(x) = ax + b$ **con** $\begin{matrix} a \cdot 0 + b = q0 \\ aL + b = 0 \end{matrix}$**. Risolvendo:** $q(x) = q_0\left(-\frac{x}{L} + 1\right)$ **(con q0 ovviamente negativo, come scritto nel testo).**

Forza di reazione vincolare: deve bilanciare le forze esterne applicate, dunque è verso il basso (quindi positiva dato l'orientamento dell'asse z scelto): $R_V = -\frac{q_0 L}{2}$ **(il segno meno è per compensare il fatto che q0 è definito negativo). La forza di taglio in zero, all'incastro, è uguale e opposta alla reazione vincolare:**



La forza di taglio calcolata in zero è uguale e opposta alla reazione vincolare:

$$T_0 = -R_V = \frac{q_0 L}{2}$$

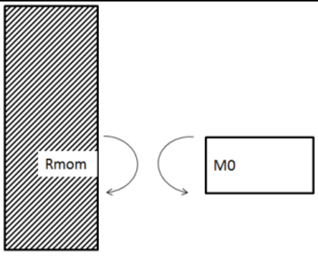
In definitiva: $T(x) = T_0 - \int_0^x q(\xi)\, d\xi = \frac{q_0 L}{2} + \frac{q_0 x^2}{2L} - q_0 x$

Analogamente, per i momenti: la coppia di reazione bilancia le forze esterne, dunque è oraria (dunque negativa nel riferimento esterno):

$$R_{mom} = q_0 \frac{L^2}{6}$$

Il momento in zero, all'incastro, è uguale e opposto alla reazione vincolare, dunque antiorario:

Cognome: .... Nome: .... Matr: ....



$$M_0 = -R_{mom} = -q_0 \frac{L^2}{6}$$

Da cui, integrando il taglio:

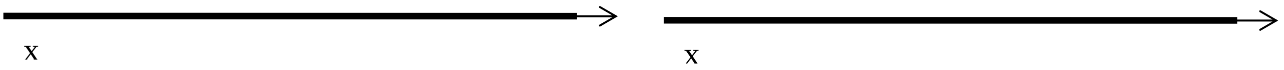
$$M(x) = M_0 + \int_0^x T(\xi)\,d\xi = -q_0 \frac{L^2}{6} + \frac{q_0 L}{2} x + \frac{q_0 x^3}{6L} - q_0 \frac{x^2}{2}$$

T(x): $T(x) = +\frac{q_0 L}{2} + \frac{q_0 x^2}{2L} - q_0 x$

M(x): $M(x) = -q_0 \frac{L^2}{6} + \frac{q_0 L}{2} x + \frac{q_0 x^3}{6L} - q_0 \frac{x^2}{2}$

T(2/3L) = -2.5000e+04

M(2/3L) = +4.1667e+04



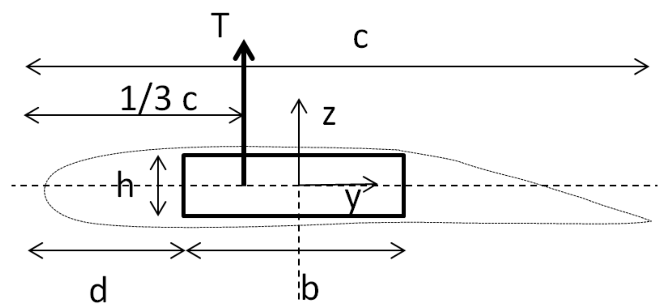
1b. Scrivere l'espressione analitica della flessione e della rotazione elastica, determinandone i valori ad x= 2/3 L:

Rotazione:	Flessione:
Ricordando che: $M(x) = -EIw''$ **E integrando una prima volta, si ottiene la w', che è l'opposto della rotazione** Valore ad x = 2/3 L : 0.0190rad = 1.09deg (antiorario)	**Integrando una seconda volta si ottiene lo sposta-mento** Valore ad x = 2/3 L: -13 cm (verso l'alto)

Costruzioni Aerospaziali - Esame 11 Aprile 2015

Cognome: .... Nome: .... Matr: ....

2. Si supponga che l'ala del velivolo al punto 1) abbia un cassone alare a sezione rettangolare (b=1200 mm, h=250 mm, t = 1.5 mm, G = 25 GPa) come riportato in figura, con baricentro a metà della corda (c = 3m). Il cassone è sollecitato dalla forza di taglio *T* (diretta verso l'alto) il cui valore si ottiene dalla distribuzione del taglio dell'esercizio precedente, valutata nel punto x=2/3L. Tale forza è applicata ad 1/3 della corda alare a partire dal bordo di attacco dell'ala.



2a. Calcolare la rotazione relativa unitaria $\Phi = \frac{d\varphi}{dx}$ prodotta dal momento torcente M_T generato dalla forza di taglio T rispetto al centro di taglio del cassone alare, riportando l'espressione e il valore della rigidezza di Bredt.

$$M_t = B\frac{d\varphi}{dx}$$

$$M_t = T\left(\frac{2}{3}L\right)\cdot\left(\frac{c}{2}-\frac{c}{3}\right)$$

B è la rigidezza torsionale

$$B = \frac{M_t}{d\varphi/dx} = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{Gt}} = 4.6552\text{e+06Nm}^2$$

$\frac{d\varphi}{dx}$ =0.0027 rad/m

2b. Scrivere l'espressione analitica del flusso di taglio q generato dalla forza tagliante T_z, riportando in figura l'andamento. Si calcoli il valore del flusso di taglio q nel punto centrale del pannello orizzontale inferiore.

$$q(s) = -\frac{T_z}{I_y}\int_0^s z\cdot t\cdot ds + q_0 = q^*(s) + q_0$$

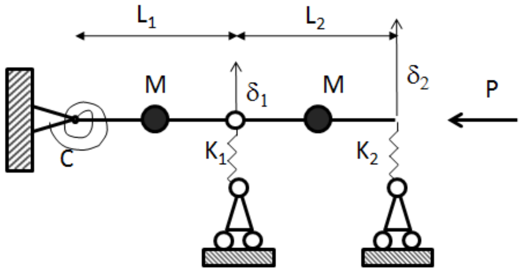
(si sceglie un punto in cui aprire la sezione e integrando si trovano i q*, che bilanciano le forze; poi si richiude e si trova il q0 che bilancia i momenti: COME DA DISPENSE E LINRI DI TESTO). Aprendo nell'angolo in basso a sinistra:

```
q0 = (T*(b/2-c/6) - b*(k*h/2*b*h + k*(h/2*h^2/2 - h^3/6)) - h*(k*h/2*b^2 - k*h/2*b^2/2))/(2*A)
```

con `k = T/Iy*t;`

3. Si consideri il sistema dinamico in figura, costituito da due aste rigide, lunghe $L_1 = L_2$ = 1m, incernierate tra loro. La loro massa è modellata come concentrata al centro di ciascuna asta, pari a M= 20kg. La cerniera centrale e l'estremità di destra della seconda asta sono collegate a due molle assiali, k_1 = 25 kN/m e k_2 = 10 kN/m. La prima asta è incernierata nella sua estremità di sinistra, dove è posta anche una molla torsionale C = 7 kNm. All'estremità di destra è applicato un carico a compressione orizzontale P= 2500N (di direzione e modulo costanti).

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti:



Cognome: .... Nome: .... Matr: ....

3.a Si scrivano le espressioni **analitiche** delle energie coinvolte (cinetica T, elastica U e il lavoro del carico P), in funzione degli spostamenti verticali assoluti delle estremità delle aste, δ_1 e δ_2, come in figura.

T=

$$T = \frac{1}{2} M \frac{\dot{\delta}_1^2}{4} + \frac{1}{2} M \left(\frac{\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2}{2} \right)^2$$

U=

$$U = \frac{1}{2} C \frac{\delta_1^2}{L_1^2} + \frac{1}{2} k_1 \delta_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \delta_2^2$$

L =

$$Lavoro = \frac{P}{L_1} \left(\frac{\delta_1^2}{2} \right) + \frac{P}{L_2} \left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{2} \right)^2$$

(l'energia collegata a questo lavoro ha il segno opposto).

3b. Si scrivano le equazioni della dinamica del sistema comprensiva del carico P:

1)

$$M \frac{\ddot{\delta}_1}{2} + M \frac{\ddot{\delta}_2}{4} + k_1 \delta_1 + \frac{C}{L_1^2} \delta_1 - 2 \frac{P}{L} \delta_1 - \frac{P}{L} \delta_2 = 0$$

2)

$$M \frac{\ddot{\delta}_1}{4} + M \frac{\ddot{\delta}_2}{4} + k_2 \delta_2 - \frac{P}{L} \delta_1 + \frac{P}{L} \delta_2 = 0$$

3c. Dopo aver riportato le espressioni delle matrici di massa M, di rigidezza K e dei carichi B, scrivere le equazioni necessarie per determinare le frequenze del sistema dinamico **in funzione del carico P**. **Trovare in particolare i valori numerici delle frequenze del sistema per il valore del carico assegnato, e nel caso di dinamica libera.**

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M/2 & M/4 \\ M/4 & M/4 \end{bmatrix} \quad K(P) = \begin{bmatrix} k_1 + C/L^2 - 2P/L & -P/L \\ -P/L & k_2 + P/L \end{bmatrix}$$

$$\omega_{1,2}^2 = eig\left(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}(P) \right)$$

Per P =0:

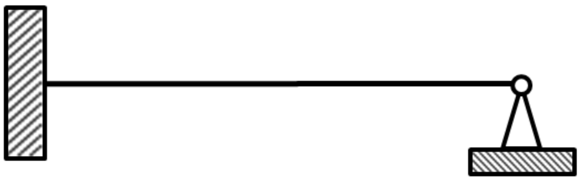
f = [148., 59.3255] hZ

Per P = 2500:

f=[122.85, 56.2729] Hz

Cognome: .... Nome: .... Matr: ....

4. Data la trave elastica in figura, incastrata all'estremo di sinistra ed incernierata all'estremo di destra, determinare una funzione per descrivere gli spostamenti che rispetti le condizioni necessarie per applicare il metodo di Ritz, e spiegare i motivi della scelta.
Con l'espressione trovata, scrivere l'equazione dell'energia elastica della trave inflessa.



5. Dato un problema di stabilità strutturale in presenza di forze conservative, descrivere almeno due metodi che si possono utilizzare per determinare il valore del carico critico.

Cognome: .... Nome: .... Matr: ....

6.Scrivere le equazioni di equilibrio e le condizioni al contorno di una piastra inflessa con i lati (di lunghezza *a* e *b*) vincolati come in figura, sottoposta ad un carico trasversale q(x,y).