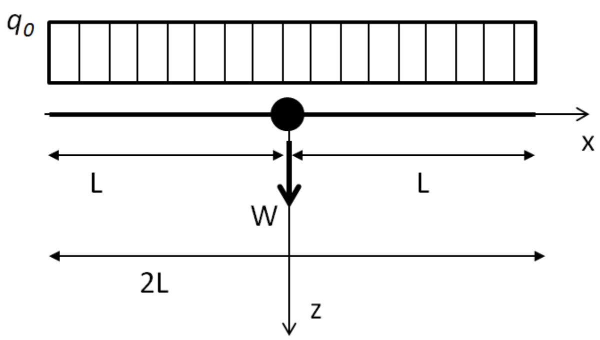
Nome:____________________________ Cognome:_________________________ Data: 18/06/2015

Esercizio N. 1	**Valutazione**	/4

Sia dato un velivolo in configurazione di equilibrio come riportato in figura. I carichi agenti sull'ala, modellata come una trave di lunghezza 2L = 20m e larghezza c=2m, sono il peso $W_F = 50000N$ (concentrato in fusoliera) e la portanza per unità di lunghezza distribuita uniformemente lungo l'ala.
Prendendo come sistema di riferimento quello indicato in figura, **determinare le espressioni analitiche e disegnare l'andamento della forza di taglio *T* e del momento flettente *M* dovuti ai carichi, indicando il loro valore in x = 0 e x= L/4.**



$$q_0 = -\frac{W}{2L} = -2500N/m$$

$\frac{dT(x)}{dx} = -q_0$ Considerando una nuova variabile $\xi = L - x$ (quindi partendo dall'estremo di destra) si ottiene: $T(\xi) = -q_0\xi$. Valori caratteristici:

$T(\xi = L) = -q_0 L = \text{-25000N}$ (cioè $x = 0^+$)

$T\left(\xi = \frac{3L}{4}\right) = -q_0\frac{3L}{4} = \text{-18750}N$ (cioè $x = \frac{L}{4}$)

Per quanto riguarda il momento:

$$M(\xi) = q_0\frac{\xi^2}{2}$$

Valori caratteristici: $M(\xi = L) = q_0\frac{L^2}{2} = 125000Nm$, $M\left(\xi = \frac{3L}{4}\right) = -\frac{q_0}{2}\left(\frac{3L}{4}\right)^2 = 70313Nm$

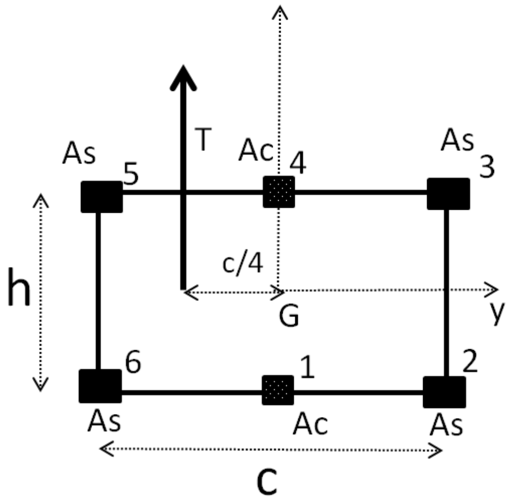
Nome:____________________________ Cognome:_________________________ Data: 18/06/2015

Esercizio N. 2	**Valutazione**	/7

Si supponga che il velivolo dell'esercizio precedente abbia un cassone alare composto da una sezione monocellulare rettangolare avente 4 solette ai vertici e due correnti interni come riportato in figura. La sezione è simmetrica con $h = 0.8m$, e $c = 2m$. L'area dei correnti centrali è Ac= 5cm^2 mentre i longheroni hanno le solette di area As=12cm^2. Sia le solette che i correnti hanno sezione quadrata. Si supponga che la forza di taglio T calcolata in (x=L/4) sia rivolta verso l'alto e che il momento flettente Mf calcolato in (x=L/4) comprima i correnti dei pannelli superiori.

Determinare:

1) La distribuzione dei flussi di taglio sui 6 pannelli che costituiscono il cassone alare ipotizzando che la loro variazione sia dovuta solo agli irrigidimenti trasversali (correnti e solette dei longheroni). Riportare le formule utilizzate ed i valori numerici.



Per semplificare il problema, si sposta la forza di taglio nel centro di taglio e si aggiunge il momento torcente per l'equivalenza dei sistemi di forze.

La risultante dei flussi dei pannelli verticali equivale alla forza di taglio verticale:

$$(q_{65} + q_{23})h = T$$

Per la simmetria del problema: $q_{65} = -q_{23}$ (verso l'alto) e dunque: $q_{23} = \frac{T}{2h}$ =1.1719e+04N/m

Momento di inerzia rispetto all'asse y: $I_y = 2\left[\frac{h^2}{4}(2A_s + A_c)\right] = 9.28\text{e-}4m^4$

$$q_{34} = q_{23} - \frac{T_z}{I_y} A_s \frac{h}{2} = 2.0205\text{e+}03 \text{ N/m}$$

Per simmetria: $q_{45} = -q_{34}$, $q_{61} = -q_{45}$, $q_{12} = -q_{34}$ (verificare)

Il flusso totale è la somma di tali flussi (che bilanciano la forza di taglio) e del flusso q_{MT} che bilancia il momento torcente introdotto per aver spostato la forza di taglio:

$$M_T = T\frac{c}{4} = 9375 \text{ Nm (senso orario)}$$

$$q_{MT} = \frac{M_T}{2(hc)} = 2.9297\text{e+}03 \text{ N/m}$$

$$q_{12}^{tot} = q_{12} - q_{MT} = -909.2134 \text{N/m}$$

E così via.

Nome:____________________________ Cognome:_________________________ Data: 18/06/2015

2) Il valore del carico di compressione agente sui correnti e sulle solette

$$\sigma_{xx} = \frac{-M_y}{I_y} z$$

Sui correnti e solette superiori: $\sigma = -3.0307\text{e+}07 \dfrac{N}{m^2}$

Sui correnti e solette superiori: $\sigma = 3.0307\text{e+}07 \dfrac{N}{m^2}$

Carico di compressione sulle solette superiori: $N_s = \sigma A_s$ = 3.6369e+04 N

Carico di compressione sul corrente superiore: $N_c = \sigma A_c$ = 1.5154e+04 N

3) Verificare se i valori del carico di compressione agenti su solette e correnti superano il valore del carico critico, nell'ipotesi che solette e correnti siano assimilabili a travi in alluminio (E = 70GPa) con doppio appoggio, di lunghezza L= 2m e sezione assegnata nel testo sopra.

Per le solette: $I_s = \dfrac{A_s^2}{12}$ = 1.2000e-07 m^4

Per i correnti: $I_c = \dfrac{A_c^2}{12}$ = 2.0833e-08 m^4

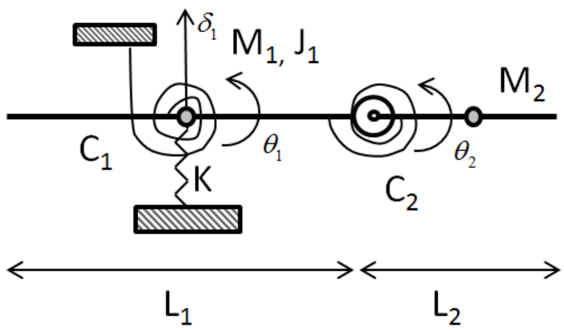
Carico critico trave doppio appoggio: $P = \pi^2 \dfrac{EI}{L^2}$

Per le solette: Pcr = 2.0726e+04 N
Per il corrente: Pcr = 3.5983e+03 N
Instabili.

Nome:____________________________ Cognome:_________________________ Data: 18/06/2015

Esercizio N. 3 **Valutazione** /8

L'ala dei punti precedenti viene schematizzata ora da un punto di vista dinamico con il modello semirigido in figura, costituito da due parti: una parte principale (ala) collegata alla fusoliera mediante una molla flessionale e una molla torsionale, e una parte mobile (flap) collegata all'ala tramite una cerniera ed una molla torsionale.



Supponendo di voler trovare le equazioni di equilibrio dinamico mediante il metodo di Lagrange, si prendano come gradi di libertà Lagrangiani :
1) l'angolo di torsione θ_1 (intorno al centro elastico, che coincide con il baricentro) dell'ala;
2) lo spostamento verticale del centro elastico dell'ala;
3) l'angolo di torsione θ_2 del flap rispetto all'orizzontale;

1) Si calcoli l'energia cinetica T del sistema
2) Si calcoli l'energia elastica U del sistema
3) Si calcoli la Lagrangiana L= T-U
4) Si scrivano le equazioni dell'equilibrio dinamico in forma matriciale
5) Supponendo che la molla K sia infinitamente rigida, come si modificano le equazioni di equilibrio del sistema? Il numero di gradi di libertà aumenta o diminuisce?
6) Calcolare il valore delle frequenze naturali per K_1= infinito; si assuma M_1=15000Kg, J_1= 11250Kgm^2, M_2= 100Kg, L_1 = 3m, L_2=1m, C_1=2e5Nm^2, C_2= 5e4Nm^2

Energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}M_1\dot{\delta}_1^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\left(\dot{\delta}_1 + \frac{L_1}{2}\dot{\theta}_1 + \frac{L_2}{2}\dot{\theta}_2\right)^2$$

Energia elastica:

$$U = \frac{1}{2}K_1\delta_1^2 + \frac{1}{2}C_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}C_2\left(\theta_2 - \theta_1\right)^2$$

$$L = T - U$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_1} + \frac{\partial U}{\partial \delta_1} = \left(M_1 + M_2\right)\ddot{\delta}_1 + M_2\frac{L_1}{2}\ddot{\theta}_1 + M_2\frac{L_2}{2}\ddot{\theta}_2 + K_1\delta_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = M_2\frac{L_1}{2}\ddot{\delta}_1 + \left(J_1 + M_2\left(\frac{L_1}{2}\right)^2\right)\ddot{\theta}_1 + M_2\frac{L_2}{2}\frac{L_1}{2}\ddot{\theta}_2 + C_1\theta_1 - C_2\left(\theta_2 - \theta_1\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} + \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = M_2\frac{L_2}{2}\ddot{\delta}_1 + M_2\frac{L_2}{2}\frac{L_1}{2}\ddot{\theta}_1 + M_2\left(\frac{L_2}{2}\right)^2\ddot{\theta}_2 + C_2\left(\theta_2 - \theta_1\right) = 0$$

Nome:_____________________________ Cognome:__________________________ Data: 18/06/2015

$$massa = \begin{bmatrix} M_1 + M_2 & M_2 \frac{L_1}{2} & M_2 \frac{L_2}{2} \\ M_2 \frac{L_1}{2} & J_1 + M_2 \left(\frac{L_1}{2}\right)^2 & M_2 \frac{L_2}{2}\frac{L_1}{2} \\ M_2 \frac{L_2}{2} & M_2 \frac{L_2}{2}\frac{L_1}{2} & M_2 \left(\frac{L_2}{2}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$rigidezza = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 + C_2 & -C_2 \\ 0 & -C_2 & C_2 \end{bmatrix}$$

Nel caso in cui la molla K1 sia così rigida da poter essere considerata infinita, lo spostamento verticale δ_1 è zero, e pertanto il sistema perde un grado di libertà. Il nuovo sistema si ricava dal precedente cancellando la prima riga e la prima colonna delle matrici di massa e rigidezza:

$$massa = \begin{bmatrix} J_1 + M_2 \left(\frac{L_1}{2}\right)^2 & M_2 \frac{L_2}{2}\frac{L_1}{2} \\ M_2 \frac{L_2}{2}\frac{L_1}{2} & M_2 \left(\frac{L_2}{2}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$rigidezza = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{bmatrix}$$

Pulsazioni proprie: $\omega_{1,2}^2 = [12.9,\ 276] \, rad^2/s^2$

Frequenze proprie: $f_{1,2} = [0.57,\ 2.64] \, Hz$

Nome:___________________________ Cognome:_________________________ Data: 18/06/2015

Esercizio N. 4	**Valutazione**	/5

Scrivere le equazioni di equilibrio dinamico e le relative condizioni agli estremi di una trave (in materiale omogeneo e isotropo) incastrata all'estremo di sinistra (x=0) ed avente una massa concentrata M all'estremo di destra (x=L).

Esercizio N. 5	**Valutazione**	/3

Indicare i passaggi analitici necessari per la determinazione delle frequenze naturali di vibrazione della trave dell'esercizio precedente.

Nome:___________________________ Cognome:________________________ Data: 18/06/2015

Esercizio N. 6	**Valutazione**	/4

Nel caso si vogliano determinare le pulsazioni naturali con il metodo di Galeerkin quale proprietà devono avere le funzioni approssimanti per la risoluzione approssimata del problema.