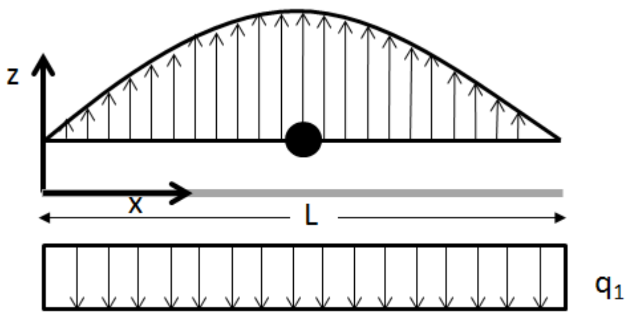
Nome:____________________________ Cognome:_________________________ Data: 08/11/2014

1. Sia data un'ala, modellata come come una trave libera di lunghezza L = 20m.
Il carico a cui è soggetta l'ala è dovuto **alla somma (algebrica)** di una distribuzione di portanza di tipo parabolico, con valore nullo alle estremità e valore massimo in mezzeria (x =L/2) e di una distribuzione di peso costante (pari a q_1). Le due distribuzioni si equivalgono e la risultante di ciascuna è pari a W_{TOT} = 200 kN. Prendendo come sistema di riferimento quello indicato in figura, determinare e disegnare l'andamento della forza di taglio *T* e del momento flettente *M* dovuti al carico, indicando il loro valore in x = L/4.



Sulla trave agiscono due carichi, uno costante q_1 *e uno parabolico* $q_2 = ax^2 + bx + c$
Entrambe le distribuzioni hanno una risultante pari a W_{TOT}
Dunque:

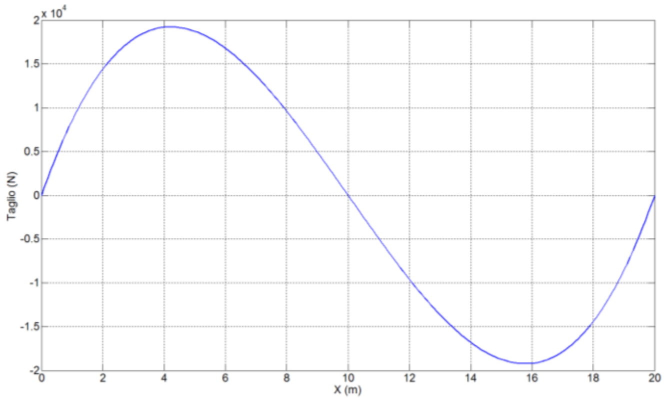
$$\int_0^L q_1 dx = W_{tot} \quad \textit{cioè:} \quad q_1 = \frac{W_{tot}}{L}$$

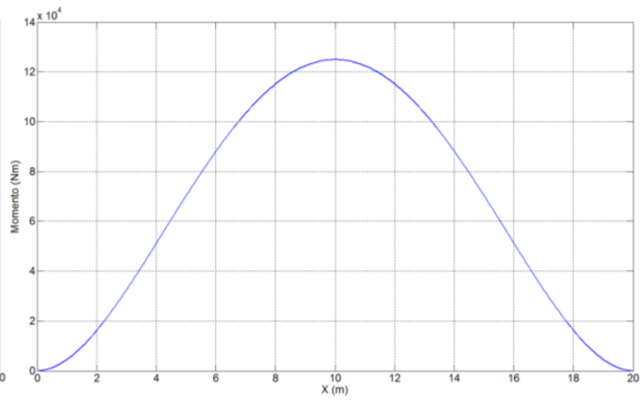
Per quanto riguarda la distribuzione parabolica $q_2 = ax^2 + bx + c$*, le costanti possono essere calcolate sapendo che 1) questa deve essere nulla agli estremi, 2) la risulta è pari a* W_{TOT}*:*

$$q_2(x=0) = c = 0$$
$$q_2(x=L) = aL^2 + bL = 0 \rightarrow b = -aL$$
$$\int_0^L q_2 dx = a\frac{L^3}{3} - a\frac{L^3}{2} \rightarrow a = -6\frac{W_{tot}}{L^3}$$

A questo punto è possibile ricavare il taglio ed il momento generati dalla somma delle due distribuzioni:

$$\frac{dT(x)}{dx} = -(q_1 + q_2) \rightarrow T(x) = \cancel{T}(0) + 2\frac{W_{tot}}{L^3}x^3 - 3\frac{W_{tot}}{L^2}x^2 + \frac{W_{tot}}{L}x$$
$$\frac{dM(x)}{dx} = T(x) \rightarrow M(x) = \cancel{M}(0) + \frac{W_{tot}}{2L^3}x^4 - \frac{W_{tot}}{L^2}x^3 + \frac{W_{tot}}{2L}x^2$$

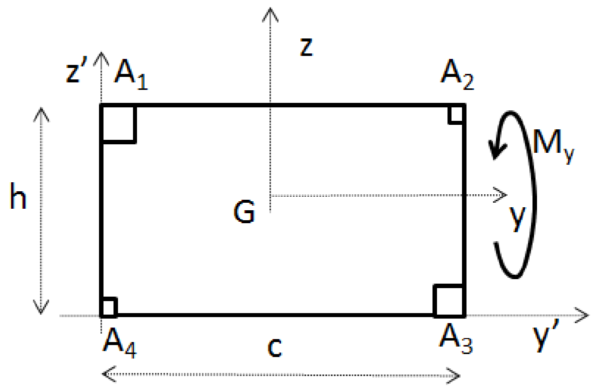




$$T\left(\frac{L}{4}\right) = 18750N \qquad M\left(\frac{L}{4}\right) = 70313N$$

Nome:_________________________ Cognome:______________________ Data: 08/11/2014

2. In riferimento all'ala dell'esercizio precedente, volendo calcolare le tensioni che agiscono sulla sezione in x = L/4, si consideri il momento M calcolato in tale punto. Il cassone alare è schematizzato come una sezione rettangolare la cui larghezza (corda media aerodinamica) è pari a c = 2.5m, e l'altezza è pari a h = 60 cm. La resistenza alle sollecitazioni di flessione è considerata unicamente data dai correnti, di sezione quadrata posti ai vertici, come in figura, in cui $A_1 = A_3 = 12cm^2$, $A_2 = A_4 = 6cm^2$; il materiale è alluminio, con E = 70GPa.



a) Dopo aver determinato il baricentro *G* della sezione rispetto agli assi (y'z'), ed i suoi momenti di inerzia baricentrici, relativi agli assi *(y,z)* in figura si determinino gli sforzi di trazione e compressione $\sigma_{1,2,3,4}$ agenti sui quattro correnti

b) Supponendo che i correnti siano lunghi 0.75m e che siano assimilabili a travi di sezione quadrata appoggiate agli estremi, determinare se il carico applicato su di essi eccede il carico critico.

Calcolo del baricentro. Per la distribuzione simmetrica delle aree dei correnti:

$$y_G = \frac{c}{2}, z_G = \frac{h}{2}$$

Momenti di inerzia:

$$I_{yy} = 2A_1\left(\frac{h}{2}\right)^2 + 2A_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 = 3.24\cdot10^{-4}m^4,\ I_{zz} = 2A_1\left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2A_2\left(\frac{c}{2}\right)^2 = 56.25\cdot10^{-4}m^4$$

$$I_{yz} = A_1\left(\frac{h}{2}\cdot\left(-\frac{c}{2}\right)\right) + A_2\left(\frac{h}{2}\cdot\left(\frac{c}{2}\right)\right) + A_3\left(-\frac{h}{2}\cdot\left(\frac{c}{2}\right)\right) + A_4\left(-\frac{h}{2}\cdot\left(-\frac{c}{2}\right)\right) = -4.5\cdot10^{-4}m^4$$

La presenza di momenti misti diversi da zero fa sì che occorra tenerne conto nel calcolo degli sforzi dovuti al momento. Poiché in figura il momento risulta di compressione, il suo valore è negativo: $M\left(\frac{L}{4}\right) = -70313N$

$$\sigma = \frac{\hat{M}_y}{I_{yy}}z + \frac{\hat{M}_z}{I_{zz}}y$$

Dove: $\hat{M}_y = \dfrac{M_y - \cancel{M_z}\left(I_{yz}/I_{zz}\right)}{1-\left(I_{yz}^2/I_{yy}I_{zz}\right)} = -79102Nm$ *e* $\hat{M}_z = \dfrac{\cancel{M_z} - M_y\left(I_{yz}/I_{yy}\right)}{1-\left(I_{yz}^2/I_{yy}I_{zz}\right)} = -109860Nm$

Sostituendo i valori: $\sigma_1 = -48.8MPa$ *(e quindi* $F_1 = -58.6kN$ *) e* $\sigma_2 = -97.7MPa$ *(e quindi* $F_2 = -58.6kN$ *).*
Analogamente, ma con segno opposto, per i correnti 3 e 4 (trazione).

Il carico critico per il corrente, modellato come una trave appoggiata agli estremi è pari a: $P_{cr} = \pi^2\dfrac{EI_{cor}}{L_{cor}^2}$*, dove* L_{cor} *è la lunghezza del corrente e* I_{cor} *il suo momento di inerzia. Essendo i correnti a sezione quadrata, si ha che:* $I_{cor} = \dfrac{1}{12}l^4 = \dfrac{1}{12}A_{corr}^2 = \begin{cases} 1.2\cdot10^{-7}m^4 & \text{per il corrente 1} \\ 3\cdot10^{-8}m^4 & \text{per il corrente 2}\end{cases}$

Verifica stabilità a carico di compressione:

$$P_{cr} = \begin{cases} 147390N > F_1\text{: resistenza a carico critico verificata} \\ 36847N < F_2\text{ : il carico applicato eccede il carico critico}\end{cases}$$

Nome:___________________________ Cognome:________________________ Data: 08/11/2014

3. Un aereo in rullaggio sulla pista (figura (a)) viene descritto come un sistema dinamico formato da tre aste rigide (con massa concentrata al centro di ognuna) incernierate tra loro (figura (b)), in cui una molla torsionale C = 7500Nm/rad collega le aste. Il carrello idealmente è un collegamento rigido con il suolo (cerniera). Il carrello di destra, tuttavia, ha una debolezza strutturale, a causa della quale esso viene rappresentato non come un carrello, ma come una molla assiale di rigidezza K = 700 kN/m. Dati numerici: L = 5m, M1 = 250 kg; M2 = 2500kg.

Figura (a)

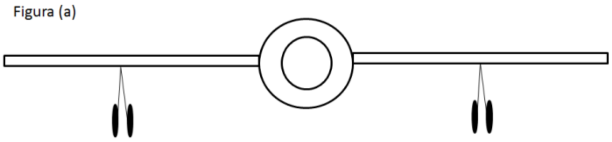
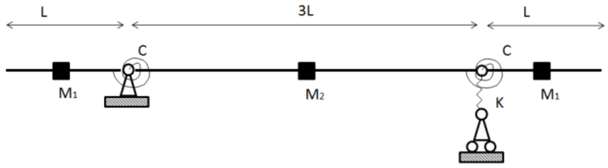


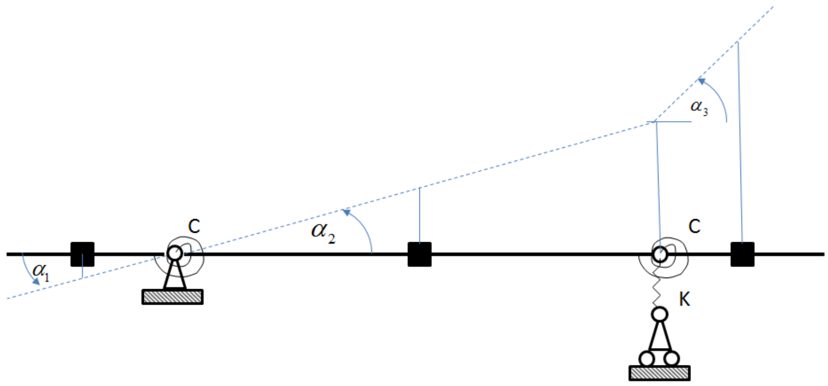
Figura (b)



a) Si dimostri che il sistema ha tre gradi di libertà.
Scelti come gradi di libertà i tre angoli rispetto all'orizzontale, si scriva:
b) L'energia cinetica del sistema, T, e l'energia elastica del sistema, U;
c) Le equazioni di equilibrio dinamico in forma matriciale;
d) I passaggi che conducono al calcolo (senza effettuarlo) delle frequenze e dei modi naturali di vibrazione in dinamica libera. **Provare a disegnare qualitativamente i modi attesi**.

a) *Se i tre corpi fossero svincolati, nel piano avrebbero ciascuno 3 gradi di libertà (gdl), quindi 9 gdl totali Sono tuttavia presenti dei vincoli: la cerniera di sinistra vincola gli spostamenti tanto della prima quanto della seconda asta (2+2) mentre la cerniera di destra impone che gli spostamenti della seconda e terza asta siano uguali (2). Dunque i gdl del sistema vincolato sono: 9-6=3*

b) *Si consideri la figura sotto, che permette di calcolare l'energia cinetica e potenziale:*



$$T = \frac{1}{2} M_1 \left(\dot{\alpha}_1 \frac{L}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} M_2 \left(\alpha_2 \frac{3L}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} M_1 \left(\dot{\alpha}_2 3L + \dot{\alpha}_3 \frac{L}{2} \right)^2$$

$$U = \frac{1}{2} C (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \frac{1}{2} C (\alpha_3 - \alpha_2)^2 + \frac{1}{2} K (3L\alpha_2)^2$$

Eq. della dinamica in forma $M\ddot{X} + KX = 0$ *dove* $X = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^T$

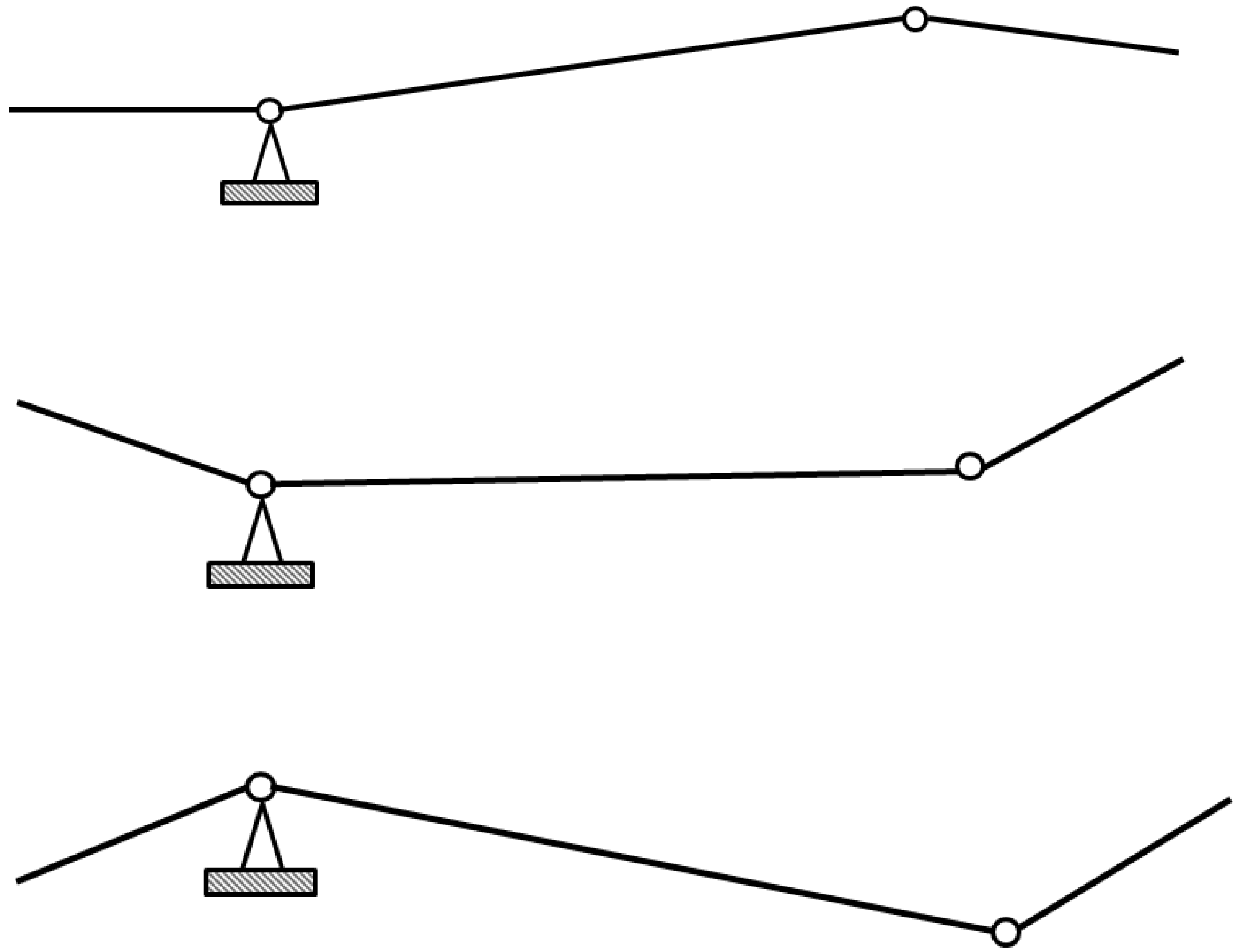
$$M = \begin{bmatrix} \frac{M_1 L^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{4} M_2 L^2 + 9 M_1 L^2 & \frac{3}{2} M_1 L^2 \\ 0 & \frac{3}{2} M_1 L^2 & \frac{1}{4} M_1 L^2 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} C & -C & 0 \\ -C & 2C + 9KL^2 & -C \\ 0 & -C & C \end{bmatrix}$$

c) *Calcolo dei modi: ipotizzando un comportamento armonico per le variabili di stato, si può porre:* $X = e^{j\omega t} X_0$, *che sostituito nell'equazioone della dinamica porta a:* $\left(-\omega^2 M + K\right) e^{j\omega t} X_0 = 0$. *Tale espressione ammette soluzione non banale se e solo se:* $\det\left(-\omega^2 M + K\right) = 0$

Si ottengono 3 valori per ω^2, *corrispondenti alle tre pulsazioni naturali del sistema. Sostituendo di nuovo nella*

Nome:___________________________ Cognome:________________________ Data: 08/11/2014

dinamica si possono trovare gli autovalori. Le figure seguenti mostrano alcune possibili deformete modali:



Nome:___________________________ Cognome:________________________ Data: 08/11/2014

4. Data una trave elastica incastrata ad un'estremità e soggetta ad un carico di compressione costante in direzione e modulo, applicato all'estremo libero, descrivere i passaggi che conducono alla determinazione del carico critico.

5. Dato il cassone alare in figura, soggetto ad una forza di taglio T a c/4 dal centro di taglio, descrivere qualitativamente (ma con l'ausilio delle formule matematiche pertinenti) i passaggi necessari per determinare lo stato di tensione sulle pareti sottili del cassone alare, e la variazione dell'angolo di torsione subito dalla sezione.