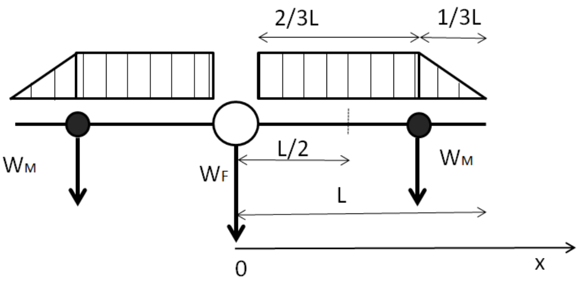
Nome:____________________________ Cognome:__________________________ Data: 12/02/2015

Esercizio N. 1	**Valutazione**	/7

Sia dato un velivolo schematizzato come in figura, con l'ipotesi di trascurare le dimensioni della fusoliera. Su ciascuna semiala, modellata come una trave di lunghezza $L=15m$ è posizionato un motore alla distanza X_M=2/3*L*. Le forze aerodinamiche (dirette verso l'alto) hanno una distribuzione costante (pari a q_0) fino a X_M=2/3*L* e poi una variazione lineare fino ad annullarsi ai due estremi (vedere figura). Supponendo che il peso del velivolo sia dato dal peso della fusoliera W_F= 60000 N a cui va aggiunto il peso di ciascun motore (W_M= 6000 N l'uno), e che la condizione di volo sia tale che la portanza bilanci esattamente il peso, calcolare l'andamento delle sollecitazioni di taglio e di momento flettente dovuti alle forze presenti. Si valuti inoltre il valore della forza di taglio T e del momento flettente M in $x=L/2$.



Data la simmetria del problema, studio soltanto la semiala destra. La portanza che agisce sulla semiala bilancia il peso di un motore e metà del peso della fusoliera:

$$\frac{W_F}{2}+W_M=q_0\frac{2}{3}L+\frac{1}{3}Lq_0\frac{1}{2}=q_0\frac{5}{6}L \text{ da cui } q_0=\frac{6}{5L}\left(\frac{W_F}{2}+W_M\right)=2880 \text{ N/m}$$

Per $2/3L<x\le L$ *la portanza è una retta che vale q0 in x=2/3L e 0 in x = L, cioè:* $q(x)=3q_0\left(-\frac{x}{L}+1\right)$

Poiché la somma delle forze verticali è nulla, la reazione vincolare verticale è anch'essa nulla: $T(0^-)=0$. In 0 c'è già una prima forza concentrata (pari a WF/2) dunque un primo salto del taglio: $T(0^+)=\frac{W_F}{2}$

Calcolo taglio:

$$\frac{dT(x)}{dx}=-q_0 \text{ per } 0<x<2/3L \text{ dunque: } T(x)=\frac{W_F}{2}-q_0x$$

$$\frac{dT(x)}{dx}=-3q_0\left(-\frac{x}{L}+1\right) \text{ per } 2/3L<x\le L\text{, dunque:}$$

$$T(x)=T\left(\frac{2L^-}{3}\right)+W_M+\int_{\frac{2}{3}L}^{x}3q_0\left(\frac{x}{L}-1\right)dx=\frac{W_F}{2}-q_0\frac{2L}{3}+W_M+3q_0\left(\frac{x^2}{2L}-x\right)_{\frac{2}{3}L}^{x}=$$

$$=\frac{W_F}{2}+W_M+3q_0\left(\frac{x^2}{2L}-x\right)+\frac{2}{3}Lq_0=q_0\frac{5}{6}L+\frac{2}{3}Lq_0+3q_0\left(\frac{x^2}{2L}-x\right)=\frac{3}{2}Lq_0+3q_0\left(\frac{x^2}{2L}-x\right)$$

Verifica: $T(L)=+3q_0\left(\frac{L^2}{2L}-L\right)+\frac{3}{2}Lq_0=-\frac{3}{2}Lq_0+\frac{3}{2}Lq_0=0$: OK

Calcolo momento:

Momento all'incastro: $M_0=-\left[q_0\frac{2L}{3}\frac{2L}{3}\frac{1}{2}+q_0\frac{L}{3}\frac{1}{2}\left(\frac{2L}{3}+\frac{L}{3}\frac{1}{3}\right)-W_M\frac{2L}{3}\right]=\text{-}168000Nm$

Per $0\le x\le 2/3L$ $\frac{dM(x)}{dx}=\frac{W_F}{2}-q_0x$ *e dunque .* $M(x)=\frac{W_F}{2}x-q_0\frac{x^2}{2}+M_0$

$M\left(\frac{2}{3}L\right)=$ -12000Nm

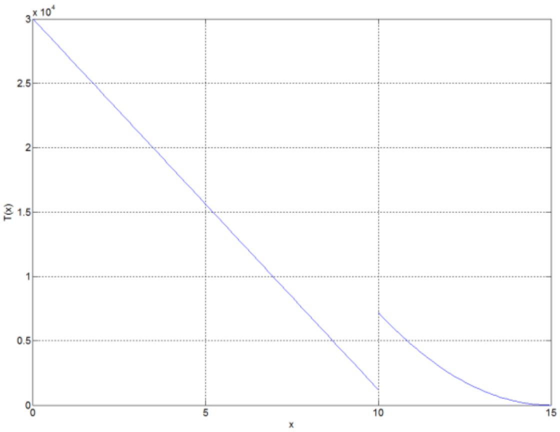
Per $2/3L<x\le L$ *:* $\frac{dM(x)}{dx}=\frac{3}{2}Lq_0+3q_0\left(\frac{x^2}{2L}-x\right)$ *e dunque:*

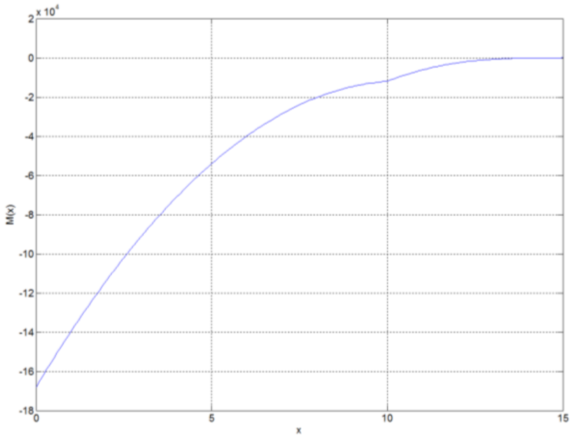
Nome:______________________________ Cognome:__________________________ Data: 12/02/2015

$$M(x) = M\left(\frac{2}{3}L\right) + \int_{\frac{2}{3}L}^{x} \frac{3}{2}Lq_0 + 3q_0\left(\frac{x^2}{2L} - x\right)dx = M\left(\frac{2}{3}L\right) + \left(\frac{3}{2}Lq_0 x + 3q_0\frac{x^3}{6L} - 3q_0\frac{x^2}{2}\right)_{\frac{2}{3}L}^{x} =$$

$$= M\left(\frac{2}{3}L\right) + \left(\frac{3}{2}Lq_0 x + q_0\frac{x^3}{2L} - 3q_0\frac{x^2}{2}\right) - \frac{13}{27}q_0 L^2$$

Verifica $M(L) = 0$ OK





Forza di Taglio T in x= L/2 = 8400 N

Momento Flettente M in x=L/2= -24000 N

Più conveniente risolverlo partendo dall'estremo libero; nuova variabile: ξ

In questo caso il carico è: $q(x) = 3q_0\frac{\xi}{L}$ *per* $0 \le \xi \le L/3$ *e* $q(\xi) = q_0$ *per* $L/3 \le \xi \le L$

$T(\xi) = 3q_0\frac{\xi^2}{2L}$, $M(\xi) = q_0\frac{\xi^3}{2L}$ per $0 \le \xi \le L/3$

Per $L/3 \le \xi \le L$

$$T(\xi) = -W_M + \frac{q_0 L}{6} + q_0\xi - \frac{q_0 L}{3} = -W_M - \frac{q_0 L}{6} + q_0\xi,$$

$$M(\xi) = M\left(\frac{L}{3}\right) + \left(-W_M - \frac{q_0 L}{6}\right)\left(\xi - \frac{L}{3}\right) + q_0\frac{\xi^2}{2} - q_0\frac{L^2}{18}$$

Verifica:

$T\left(\xi = \frac{L}{2}\right) = W_M + \frac{q_0 L}{6} + q_0\frac{L}{2} - \frac{q_0 L}{3} =$ 8400N OK (come sopra)

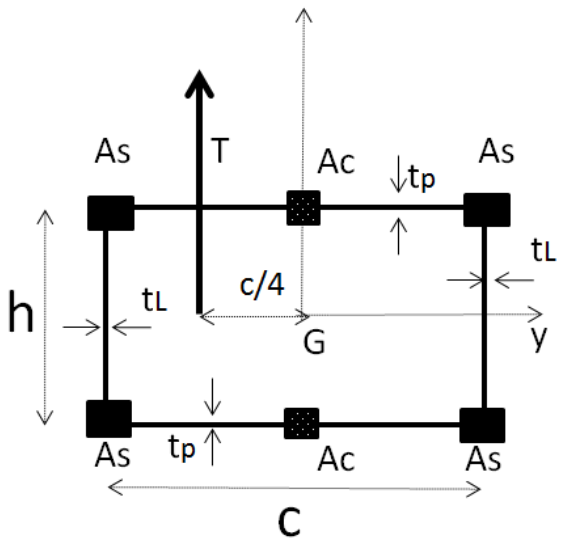
$M\left(\frac{L}{3}\right)$ =12000Nm

$M\left(\xi = \frac{L}{2}\right) = M\left(\frac{L}{3}\right) + \left(-W_M - \frac{q_0 L}{6}\right)\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right) + q_0\frac{L^2}{8} - q_0\frac{L^2}{18}$ =24000Nm OK (come sopra)

Nome:____________________________ Cognome:_________________________ Data: 12/02/2015

Esercizio N. 2	**Valutazione**	/7

In riferimento all'ala dell'esercizio precedente, si consideri il cassone alare in figura, schematizzato come una sezione simmetrica costante lungo l'apertura alare, con $h = 0.7m$, e $c = 2m$. Il cassone è dotato di due correnti centrali di area Ac= 5cm^2 mentre i longheroni hanno le solette di area As=12cm^2. Sia le solette che i correnti hanno sezione quadrata. I panelli di rivestimento (superiore e inferiore) hanno uno spessore tp=2mm mentre le anime dei longheroni hanno uno spessore tL=5mm. Si supponga che la forza di taglio T= T(x), calcolata all'esercizio precedente, sia applicata ad 1/4c (come in figura) e che la **resistenza flessionale del cassone sia dovuta solo ai correnti e alle solette** dei longheroni mentre i **pannelli di rivestimento e le anime dei longheroni concorrano alla sola resistenza torsionale**. Il materiale è alluminio, con E = 70GPa, ν=0.3.



2.a Calcolare i momenti di inerzia intorno agli assi baricentrici che concorrono alla resistenza a flessione:

Calcolo del baricentro. Per la distribuzione simmetrica delle aree dei correnti:

$$y_G = \frac{c}{2} = 2\,\mathrm{m}, z_G = \frac{h}{2} = 0.35m$$

Momenti di inerzia:

$$I_{yy} = 4A_s\left(\frac{h}{2}\right)^2 + 2A_c\left(\frac{h}{2}\right)^2 = 7.105\cdot10^{-4}m^4,\ I_{zz} = 4A\left(\frac{c}{2}\right)^2 = 0.0048m^4$$

$I_{yz} = 0m^4$ *(sezione simmetrica)*

2.b Scrivere l'espressione dello spostamento flessionale w=w(x) (verticale nella figura) della semiala per 0<x<2L/3, dovuto alla forza di taglio T(x) e calcolarne il valore in x=L/2 :

$$EI_{yy}w'' = -M(x)$$

Integrando una prima volta:

$$w' = \frac{1}{EI_{yy}}\left(\frac{W_F}{4}x^2 - q_0\frac{x^3}{6} + M_o x\right) + c_1$$, con c1=0 in quanto all'incastro la rotazione è nulla

Integrando una seconda volta:

$$w = \frac{1}{EI_{yy}}\left(\frac{W_F}{12}x^3 - q_0\frac{x^4}{24} + M_o\frac{x^2}{2}\right) + c_2$$ con c2 =0 in quanto all'incastro lo spostamento è nullo.

Valore numerico di w in x=L/2 =-0.0602 m

Nome:____________________________ Cognome:_________________________ Data: 12/02/2015

2.c Scrivere l'espressione della rigidezza torsionale di Bredt del cassone alare e calcolarne il valore numerico:

La rigidezza flessionale di Bredt è: $B=\frac{M_t}{d\varphi/dx}=\frac{4A^2}{\oint\frac{ds}{Gt}}$, dovuta unicamente al rivestimento. Poiché lo spessore non è costante, si ha:

$$B=\frac{4G\left(ch\right)^2}{\frac{2h}{t_L}+\frac{2c}{t_P}}=9.26\mathrm{e}7\mathrm{Nm}^2$$, essendo $G=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}=26.9GPa$

2.d Scrivere l'espressione dell'angolo di torsione ϑ=ϑ(x) lungo tutta l'apertura alare dovuto all'effetto della forza di taglio T(x) posta a C/4 e calcolare il valore in x=L/2

Momento torcente: $M_T\left(x\right)=T\left(x\right)\frac{c}{4}$

Rotazione per unità di lunghezza: $M_t=B\frac{d\theta}{dx}$

Torsione lungo la semiala:

Per 0<x<2L/3: $\frac{d\theta}{dx}=\frac{T\left(x\right)}{B}\frac{c}{4}=\frac{c}{4B}\left(\frac{W_F}{2}-q_0x\right)$ e dunque:

$$\theta\left(x\right)=\int_0^x\frac{c}{4B}\left(\frac{W_F}{2}-q_0x\right)dx+\theta\left(0\right)=\frac{c}{4B}\left(\frac{W_F}{2}x-q_0\frac{x^2}{2}\right)$$ con theta0=0 all'incastro.

Per 2L/3<x<L:

$$\theta\left(x\right)=\int_{\frac{2L}{3}}^x\frac{c}{4B}\left(\frac{3}{2}Lq_0+3q_0\left(\frac{x^2}{2L}-x\right)\right)dx+\theta\left(2L/3\right)=$$

$$=\frac{c}{4B}\left[\left(\frac{3}{2}Lq_0x+q_0\frac{x^3}{2L}-3q_0\frac{x^2}{2}\right)-\frac{13}{27}q_0L^2\right]+\theta\left(2L/3\right)$$

(si noti che i calcoli sono gli stessi già effettuati per il momento flettente)

Valore numerico di ϑ in x=L/2 =7.7773e-04 rad = 0.0446deg

2.e Supponendo che i correnti centrali possano essere assimilati ad una trave incastrata tra due centine distanziate di 1m calcolare il valore del carico critico degli stessi.

Espressione del carico critico:

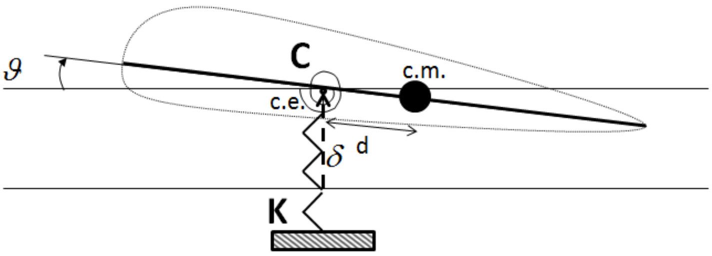
$P_{cr}=\pi^2\frac{4EI_{cor}}{L_{cor}^2}$ *dove* $I_{cor}=\frac{1}{12}l^4=\frac{1}{12}A_c^2=2.08\cdot10^{-8}m^4$ *e Lcor=1*

Valore numerico del carico critico: $P_{cr}=57573N$

Nome:______________________________ Cognome:___________________________ Data: 12/02/2015

Esercizio N. 3	**Valutazione**	/5

L'ala dei punti precedenti viene schematizzata ora da un punto di vista dinamico con il modello semirigido in figura. Supponendo di voler determinare le due frequenze naturali di vibrazione del sistema si prendano: **1)** come variabili lagrangiane l'angolo di torsione θ (intorno al centro elastico) e lo spostamento verticale δ dello stesso; **2)** come rigidezza della molla torsionale il rapporto tra il momento torcente e l'angolo di torsione calcolati in x=L/2; **3)** come rigidezza flessionale K il rapporto tra la forza di taglio T e lo spostamento flessionale w calcolati in x=L/2; **4)** la massa dell'ala concentrata sul centro di massa c.m. sia pari a M= 700 Kg; **4)** il momento di inerzia intorno al baricentro Jcg = 650 kgm^2. Si assuma come distanza tra il centro elastico e il C.M. un valore pari a d=20cm.



Rigidezza torsionale C:

Dall'esercizio precedente: $C = \dfrac{\left(T\left(\frac{L}{2}\right)\frac{c}{4}\right)}{\theta\left(\frac{L}{2}\right)}$ = 5.4e06Nm/rad

Rigidezza flessionale K:

Dall'esercizio precedente: $K = \dfrac{\left(T\left(\frac{L}{2}\right)\right)}{w\left(\frac{L}{2}\right)}$ = 1.3948e5 N/m

3.b Scrivere l'energia cinetica, potenziale, la Lagrangiana del sistema e le equazioni della dinamica in forma matriciale

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{\delta} - d\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2}K\delta^2 + \frac{1}{2}C\theta^2$$

L = T-U

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{w}} + \frac{\partial U}{\partial w} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

$$M\left(\ddot{\delta} - d\ddot{\theta}\right) + Kw = 0$$

$$-Md\left(\ddot{\delta} - d\ddot{\theta}\right) + J\ddot{\theta} + Cd\theta = 0$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} M & -Md \\ -Md & Md^2 + J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\delta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nome:_____________________________ Cognome:__________________________ Data: 12/02/2015

3.c Ricavare le frequenze ed i modi propri del sistema disegnandoli qualitativamente, riportando i valori delle rigidezze flessionali e torsionali del punto precedente

Ipotizzando un comportamento armonico per le variabili di stato, si può porre: $X = e^{j\omega t} X_0$*, che sostituito nell'equazione della dinamica porta a:* $\left(-\omega^2 M + K\right) e^{j\omega t} X_0 = 0$*. Tale espressione ammette soluzione non banale se e solo se:* $\det\left(-\omega^2 M + K\right) = 0$

Si ottengono 2 valori per ω^2*, corrispondenti alle tre pulsazioni naturali del sistema.*

$$\det\left(\begin{bmatrix} K - \omega^2 M & \omega^2 Md \\ \omega^2 Md & C - \omega^2\left(Md^2 + J\right) \end{bmatrix}\right) = 0$$

Da cui: $MJ\omega^4 - \omega^2\left(KMd + CM\right) + KC = 0$

$\omega_1 = 14.25 rad/s$, $\omega_2 = 90.2662 rad/s$

Con autovettori: $\begin{bmatrix} -1 \\ 0.0053 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} -0.2007 \\ -0.9796 \end{bmatrix}$

Esercizio N. 4 **Valutazione** /5

Indicare le principali differenze tra il metodo di Galërkin e il metodo agli elementi finiti per la soluzione di un problema strutturale.

Esercizio N. 5 **Valutazione** /5

Si illustrino i passaggi necessari allo studio della stabilità dell'equilibrio elastico in presenza di forze non conservative.

Nome:____________________________ Cognome:_________________________ Data: 12/02/2015

Esercizio N. 6	**Valutazione**	/5
Volendo aumentare la rigidezza torsionale di Bredt di un cassone alare inizialmente a connessione semplice quali accorgimenti utilizzereste e perché?		