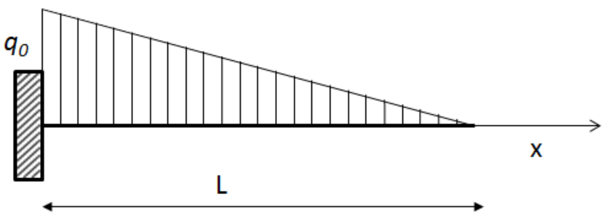
Nome:______________________________ Cognome:__________________________ Data: 22/01/2015

Esercizio N. 1	**Valutazione**	/4

Sia data un'ala, modellata come una trave di lunghezza $L=10m$ incastrata nell'estremo di sinistra. Le forze aerodinamiche sono prevalentemente in direzione verticale, modellate come una distribuzione lineare con valore $q_0=1500N/m$ alla radice e nullo all'estremo libero. Calcolare l'andamento del taglio e del momento dovuto a tali forze, disegnandone qualitativamente l'andamento.



Calcolare in particolare il valore in $x=L/4$.

Sol:

$$q(x)=q_0-q_0\frac{x}{L}$$

Reazioni vincolari: $R_{Vert}=\int_0^L q(x)\,dx=\int_0^L\left[q_0-q_0\frac{x}{L}\right]dx=\left(q_0L-q_0\frac{L^2}{2L}\right)=q_0\frac{L}{2}=7500\text{N}$

$$R_{mom}=\frac{L}{3}\int_0^L q(x)\,dx==\frac{L}{3}q_0\frac{L}{2}=q_0\frac{L^2}{6}=25000N$$

Calcolo taglio:

$$\frac{dT(x)}{dx}=-q \quad \textit{dunque} \quad \frac{dT(x)}{dx}=-q_0+q_0\frac{x}{L}$$

$$T(x)=T_0+\int_0^x\left(-q_0+q_0\frac{x}{L}\right)dx=R_{Vert}-q_0x+q_0\frac{x^2}{2L};$$

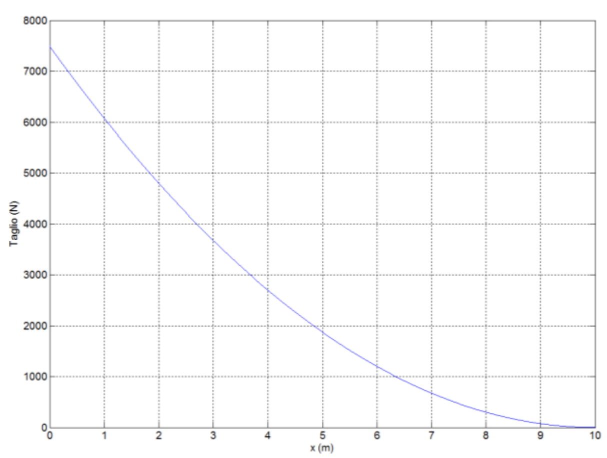
$$T\left(\frac{L}{4}\right)=4219N$$

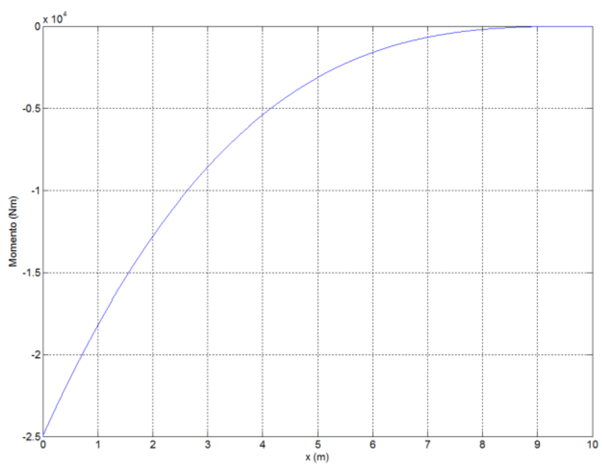
Calcolo momento:

$$\frac{dM(x)}{dx}=T(x)\rightarrow M(x)=M(0)+R_{Vert}x-q_0\frac{x^2}{2}+q_0\frac{x^3}{6L},$$

dove $M(0)=R_{mom}$

$$M\left(\frac{L}{4}\right)=\text{-}10547Nm$$

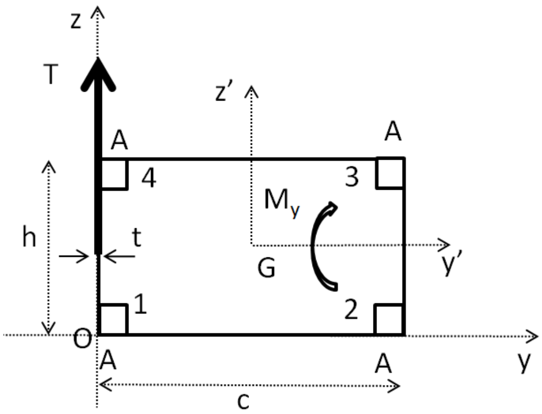




Nome:____________________________ Cognome:_________________________ Data: 22/01/2015

Esercizio N. 2 **Valutazione** /9

In riferimento all'ala dell'esercizio precedente, si consideri il cassone alare in figura, schematizzato come una sezione simmetrica rettangolare, con $h = 0.5m$, e $c = 2.5m$.
Volendo calcolare le tensioni che agiscono sulla sezione in $x = L/4$, si consideri il taglio *T* ed momento *M* calcolati in tale punto; il taglio sia applicato in corrispondenza del longherone principale, come in figura. Si consideri il modello idealizzato di cassone alare, dove i correnti, di sezione quadrata di superficie A = 9cm^2, lavorano a sforzo normale mentre i pannelli lavorano a taglio. Il materiale è alluminio, con E = 70GPa.



2.a Calcolare la posizione del baricentro del cassone rispetto al sistema di riferimento (yz) con origine in O, ed i momenti di inerzia principali:

Calcolo del baricentro. Per la distribuzione simmetrica delle aree dei correnti:

$$y_G = \frac{c}{2} = 1.25\,\mathrm{m},\ z_G = \frac{h}{2} = 0.25m$$

Momenti di inerzia:

$$I_{yy} = 4A\left(\frac{h}{2}\right)^2 = 2.25\cdot 10^{-4} m^4,\ I_{zz} = 4A\left(\frac{c}{2}\right)^2 = 56\cdot 10^{-4} m^4$$

$I_{yz} = 0m^4$ *(sezione simmetrica)*

2.b Calcolare gli sforzi assiali agenti sui correnti dovuti al momento flettente My:

$$\sigma = \frac{\hat{M}_y}{I_{yy}} z + \frac{\hat{M}_z}{I_{zz}} y$$

Dove: $\hat{M}_y = \dfrac{M_y - \cancel{M_z}\left(I_{yz}/I_{zz}\right)}{1-\left(\cancel{I}_{yz}^2/I_{yy}I_{zz}\right)} = \left|M\left(\dfrac{L}{4}\right)\right| = 10547Nm$ *e* $\hat{M}_z = \dfrac{\cancel{M_z} - M_y\left(\cancel{I}_{yz}/I_{yy}\right)}{1-\left(\cancel{I}_{yz}^2/I_{yy}I_{zz}\right)} = 0Nm$

Poiché My comprime il primo quadrante, devo inserire nelle formule il valore $M\left(\dfrac{L}{4}\right) = \text{-}10547Nm$

$\sigma_1 = -\dfrac{\lvert M\rvert}{I_{yy}}\dfrac{h}{2}$ trazione	$\sigma_2 = -\dfrac{\lvert M\rvert}{I_{yy}}\dfrac{h}{2}$ trazione	$\sigma_3 = \dfrac{\lvert M\rvert}{I_{yy}}\dfrac{h}{2}$ compressione	$\sigma_4 = \dfrac{\lvert M\rvert}{I_{yy}}\dfrac{h}{2}$ compressione
11.72 MPa	11.72 MPa	-11.72 MPa	-11.72 MPa

Nome:______________________________ Cognome:__________________________ Data: 22/01/2015

2.c Calcolare i flussi di taglio totali sulle pareti dovuti alla forza di taglio T, riportandone graficamente gli andamenti:

$$q(s) = -\frac{\hat{T}_z}{I_y}\left[\int_0^s z \cdot t \cdot ds + \sum_{j=1}^{N} z_j B_j\right] - \frac{\hat{T}_y}{I_z}\left[\int_0^s y \cdot t \cdot ds + \sum_{j=1}^{N} y_j B_j\right] + q_0 = q^*(s) + q_0$$

In questo caso:

$$q(s) = -\frac{T_z}{I_{yy}} A \sum_{j=1}^{N} z_j + q_0 = q^*(s) + q_0$$

Calcolo del q. Apro la sezione in 1:*

$$q_{12}^* = 0\,,\ q_{23}^* = -\frac{T_z}{I_{yy}} A\left(-\frac{h}{2}\right),\ q_{34}^* = 0,\ q_{41}^* = -\frac{T_z}{I_{yy}} A\left(\frac{h}{2}\right)$$

Equilibrio momenti torcenti rispetto a 1:

$$2(hc)q_0 + \left(q_{23}^* h\right)c = T \cdot 0 \qquad q_0 = -\frac{q_{23}^* hc}{2hc} = -\frac{q_{23}^*}{2} = -\frac{T_z}{I_{yy}} A\left(\frac{h}{4}\right)$$

Flussi di taglio totali:

$$q_{12} = -\frac{T_z}{I_{yy}} A\left(\frac{h}{4}\right) = -2109.4\,\mathrm{N/m},\ q_{23} = \frac{T_z}{I_{yy}} A\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{T_z}{I_{yy}} A\left(\frac{h}{4}\right) = \frac{T_z}{I_{yy}} A\left(\frac{h}{4}\right),\ q_{34} = -\frac{T_z}{I_{yy}} A\left(\frac{h}{4}\right),$$

$$q_{41} = -\frac{T_z}{I_{yy}} A\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{T_z}{I_{yy}} A\left(\frac{h}{4}\right) = -\frac{T_z}{I_{yy}} A\left(\frac{3h}{4}\right) = 6328\,\mathrm{N/m}$$

Verifica forze interne orizzontali:

$$q_{12}c - q_{34}c = -\frac{T_z}{I_{yy}} A\left(\frac{hc}{4}\right) + \frac{T_z}{I_{yy}} A\left(\frac{hc}{4}\right) = 0 \quad \textit{(OK)}$$

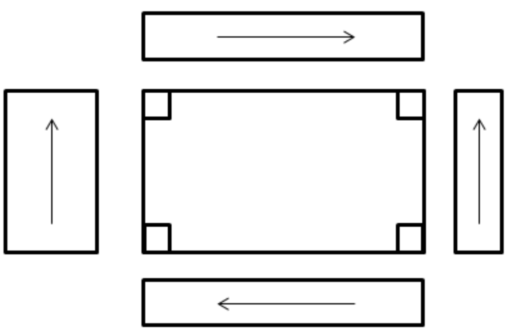
Verifica forze interne verticali:

$$q_{23}h - q_{41}h = \frac{T_z}{I_{yy}} A\left(\frac{h^2}{4}\right) + \frac{T_z}{I_{yy}} A\left(\frac{3h^2}{4}\right) = \frac{T_z}{I_{yy}} Ah^2 = \frac{T_z}{4A\left(\frac{h}{2}\right)^2} Ah^2 = T_z \quad \textit{(OK)}$$

Verifica momento torcente rispetto a 1:

$$\left(q_{23}h\right)c + \left(q_{34}c\right)h = \frac{T_z}{I_{yy}} A\left(\frac{h^2}{4}\right)c - \frac{T_z}{I_{yy}} A\left(\frac{h^2}{4}\right)c = 0 \quad \textit{(OK)}$$

Disegno qualitativo:



Nome:___________________________ Cognome:________________________ Data: 22/01/2015

2.e Supponendo che i correnti siano appoggiati a due centine consecutive distanti 3m l'una dall'altra, si verifichi se il carico di compressione esercitato sui correnti porti ad instabilità dell'equilibrio elastico.

Il carico critico per il corrente, modellato come una trave appoggiata agli estremi è pari a: $P_{cr} = \pi^2 \frac{EI_{cor}}{L_{cor}^2}$*,*

dove $L_{cor} = 3m$ *è la lunghezza del corrente e* I_{cor} *il suo momento di inerzia. Essendo i correnti a sezione quadrata, si ha che:* $I_{cor} = \frac{1}{12} l^4 = \frac{1}{12} A_{corr}^2 = 6.75 \cdot 10^{-8} m^4$

Verifica stabilità a carico di compressione:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI_{cor}}{L_{cor}^2} = 5182N$$

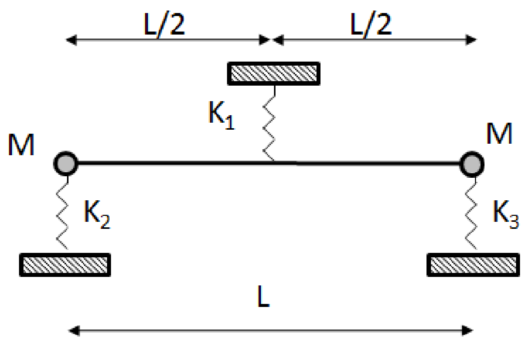
Carico sui correnti:

$$F_1 = \sigma_1 A = 10547\text{N}$$

Il carico applicato supera il carico critico: instabilità

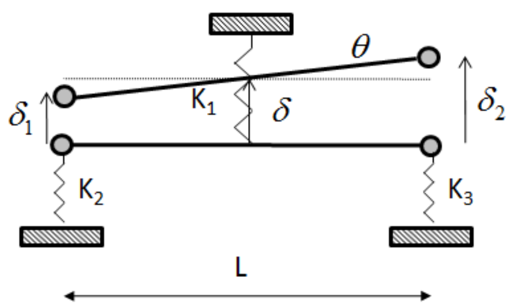
Esercizio N. 3 **Valutazione** /7

Un carrello di un aeromobile è modellato come il sistema articolato in figura, composto da un'asta rigida di lunghezza $L = 0.6m$, con proprietà inerziali modellate con due masse $m = 7kg$ poste alle estremità, collegata alla fusoliera tramite un elemento di rigidezza assiale $k_1 = 13kN/m$. Gli pneumatici siano modellati come due molle assiali con $k_1 = 3kN/m$ e $k_3 = 2.5kN/m$. Nel problema in esame, si trascuri la possibilità di moto orizzontale del sistema.



3.a Scelte come variabili lagrangiane la rotazione dell'asta e lo spostamento verticale (rispetto alla configurazione indeformata) del centro dell'asta, scrivere l'energia cinetica, potenziale e la Lagrangiana del sistema.

Disegno della configurazione deformata:



Si ha che:

$\delta_1 = \delta - \frac{L}{2}\theta$ *,*

$\delta_2 = \delta + \frac{L}{2}\theta$

Energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{\delta}_1^2 + \frac{1}{2} m\dot{\delta}_2^2 = \frac{1}{2} m\left(\dot{\delta} - \frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{\delta} + \frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2} m\left(2\dot{\delta}^2 + \frac{L^2}{2}\dot{\theta}^2\right)^2$$

Nome:____________________________ Cognome:_________________________ Data: 22/01/2015

Energia potenziale:

$$U=\frac{1}{2}k_1\delta^2+\frac{1}{2}k_2\delta_1^2+\frac{1}{2}k_3\delta_2^2=\frac{1}{2}k_1\delta^2+\frac{1}{2}k_2\left(\delta-\frac{L}{2}\theta\right)^2+\frac{1}{2}k_3\left(\delta+\frac{L}{2}\theta\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\delta^2\left(k_1+k_2+k_3\right)+\frac{L^2\theta}{8}\left(k_2+k_3\right)+\frac{L\delta\theta}{2}\left(-k_2+k_3\right)$$

Lagrangiana:

$$L=T-U=\frac{1}{2}m\left(2\dot{\delta}^2+\frac{L^2}{2}\dot{\theta}^2\right)^2-\left[\frac{1}{2}\delta^2\left(k_1+k_2+k_3\right)+\frac{L^2\theta^2}{8}\left(k_2+k_3\right)+\frac{L\delta\theta}{2}\left(-k_2+k_3\right)\right]$$

3.b Scrivere le equazioni della dinamica in forma matriciale.

Per ricavare le equazioni del moto:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\delta}}+\frac{\partial U}{\partial\delta}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}+\frac{\partial U}{\partial\theta}=0$$

Cioè, in forma matriciale:

$$M\ddot{X}+KX=0$$

Dove:

$$X=\begin{bmatrix}\delta\\ \theta\end{bmatrix},\quad M=\begin{bmatrix}2m & 0\\ 0 & \frac{mL^2}{2}\end{bmatrix},\ e\quad K=\begin{bmatrix}k_1+k_2+k_3 & \frac{L}{2}\left(-k_2+k_3\right)\\ \frac{L}{2}\left(-k_2+k_3\right) & \frac{L^2}{4}\left(k_2+k_3\right)\end{bmatrix}$$

3.c Ricavare le frequenze ed i modi propri del sistema, disegnandoli qualitativamente

Ipotizzando un comportamento armonico per le variabili di stato, si può porre: $X=e^{j\omega t}X_0$*, che sostituito nell'equazione della dinamica porta a:* $\left(-\omega^2M+K\right)e^{j\omega t}X_0=0$*. Tale espressione ammette soluzione non banale se e solo se:* $\det\left(-\omega^2M+K\right)=0$

Si ottengono 2 valori per ω^2*, corrispondenti alle tre pulsazioni naturali del sistema.*

$$\det\left(\begin{bmatrix}k_1+k_2+k_3-2m\omega^2 & \frac{L}{2}\left(-k_2+k_3\right)\\ \frac{L}{2}\left(-k_2+k_3\right) & \frac{L^2}{4}\left(k_2+k_3\right)-\frac{L^2}{2}m\omega^2\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\left(k_1+k_2+k_3-2m\omega^2\right)\left(\frac{L^2}{4}\left(k_2+k_3\right)-\frac{L^2}{2}m\omega^2\right)-\left[\frac{L}{2}\left(-k_2+k_3\right)\right]^2=0$$

O equivalentemente cerco gli autovalori: $eig\left(M^{-1}K\right)$*. Si trova:*

$$\omega_1^2=1322.8\,{rad^2}/{s^2}\quad \omega_2^2=391.5\,{rad^2}/{s^2}\text{, quindi }\ \omega_1=36.37\,{rad}/{s},\ \omega_2=19.79\,{rad}/{s}$$

Sostituendo di nuovo nella dinamica si possono trovare gli autovettori:

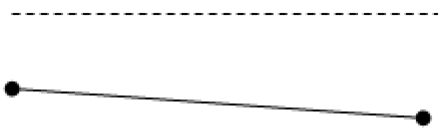
Nome:______________________________ Cognome:__________________________ Data: 22/01/2015

$$\begin{bmatrix}\delta \\ \theta\end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix}0.992 \\ -0.1270\end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix}\delta \\ \theta\end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix}0.0115 \\ 0.9999\end{bmatrix}$$

Volendo disegnarli, si ricordi che: $\delta_1 = \delta - \frac{L}{2}\theta$, $\delta_2 = \delta + \frac{L}{2}\theta$

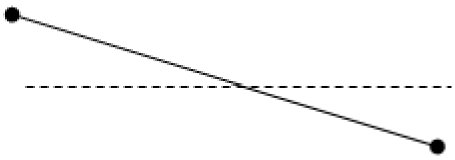
Dunque per il primo modo;

$$\begin{bmatrix}\delta_1 \\ \delta_2\end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix}1.0300 \\ 0.9538\end{bmatrix}$$



E per il secondo modo:

$$\begin{bmatrix}\delta_1 \\ \delta_2\end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix}-0.2885 \\ 0.3115\end{bmatrix}$$



3.d Cosa deve accadere affinché i due modi siano uno puramente traslazionale e uno puramente rotazionale?

Le due equazioni in delta e alfa (traslazionale e rotazionale) devono essere disaccoppiate. Questo accade se: k2 = k3, condizione che rende diagonale la matrice di rigidezza (quella di massa lo è già).

Esercizio N. 4	**Valutazione**	/4

Indicare e commentare le ipotesi alla base della teoria semplificata necessaria alla determinazione delle equazioni delle strutture a guscio in parete sottile.

Nome:___________________________ Cognome:________________________ Data: 22/01/2015

Esercizio N. 5	**Valutazione**	/4

Il candidato illustri le ipotesi principali alla base dell'applicazione del metodo di Ritz per la risoluzione di un problema strutturale quale ad esempio un problema di equilibrio statico.

Esercizio N. 6	**Valutazione**	/4

Volendo studiare la stabilità dell'equilibrio elastico di una struttura aerospaziale quale metodo impiegherebbe e perché?

Nome:____________________________ Cognome:_________________________ Data: 22/01/2015