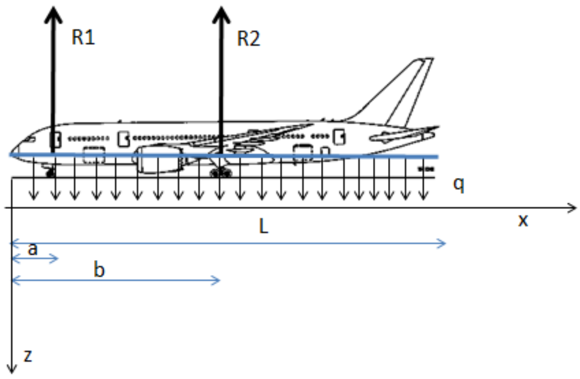
Nome:____________________________ Cognome:_________________________ Data: 19/01/2017

Esercizio N. 1	**Valutazione**	/5

La fusoliera di un velivolo fermo in pista, come riportato in figura, viene schematizzata come una trave di lunghezza L=80m appoggiata su due carrelli posti ad una distanza a=8m e b=50m dalla prua. Si supponga che il peso del velivolo sia pari a 350 tonnellate e uniformemente distribuito lungo la fusoliera.

Assumendo gli assi come in figura:



1a Calcolare le reazioni vincolari R1 e R2 (formula e valore numerico):

$$q = \frac{W}{L} = 42.9 kN/m$$

$$R_1 + R_2 = W$$

$$R_1 a + R_2 b = q\frac{L^2}{2}$$

Da cui:

$$R_2 = \frac{q\frac{L^2}{2} - Wa}{b-a} = 2616 kN/m$$

$$R_1 = \frac{-q\frac{L^2}{2} + Wb}{b-a} = 817.5 kN/m$$

1.b Scrivere l'espressione analitica della distribuzione delle forze taglianti T(x) e dei momenti flettenti M(x) lungo l'asse x della fusoliera, disegnandone l'andamento e calcolando il valore in x = 45m.

Eq. di partenza: $\frac{dT}{dx} = -q(x)$ *e* $\frac{dM}{dx} = T(x)$

Per $0 \le x < a$: $T = -qx$, $M = -q\frac{x^2}{2}$

Discontinuità nel taglio in a: $T(a^+) = T(a^-) + R_1 = -qa + R_1$

Per $a < x < b$:

$T(x) - T(a^+) = -\int_a^x q(x)dx = -q(x-a)$ *da cui:* $T(x) = R_1 - qx$

$$M(x) - M(a^+) = \int_a^x T(x)dx = R_1(x-a) - q\frac{x^2}{2}$$

Discontinuità nel taglio in b: $T(b^+) = T(b^-) + R_1 = R_1 + R_2 - qb$

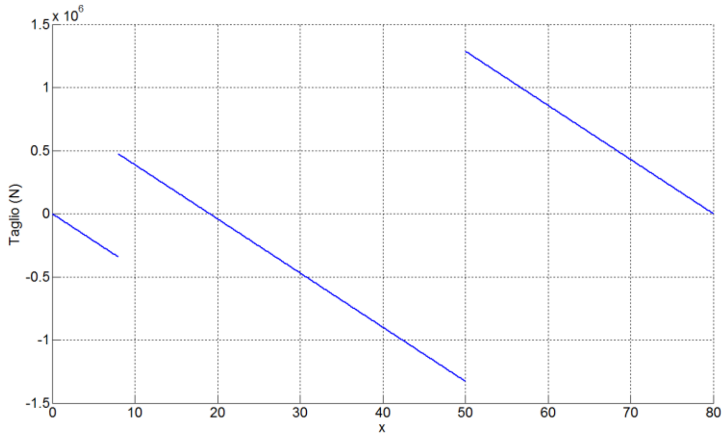
Per $b < x \le L$:

$T(x) - T(b^+) = -\int_b^x q(x)dx = -q(x-b)$ *da cui:* $T(x) = R_1 + R_2 - qx$ *(notare: per x=L si ha T(L)=0)*

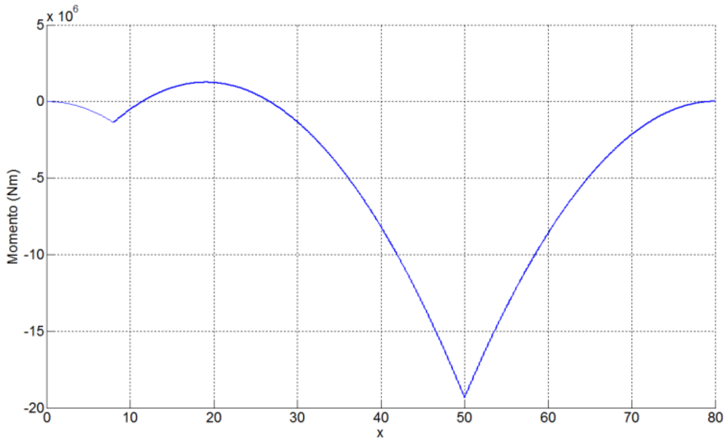
$$M(x) - M(b^+) = \int_b^x T(x)dx = -R_1 a - R_2 b + (R_1 + R_2)x - q\frac{x^2}{2}$$

Grafici:

Nome:______________________________ Cognome:___________________________ Data: 19/01/2017



per x = 45, T=-1.1138e+06N



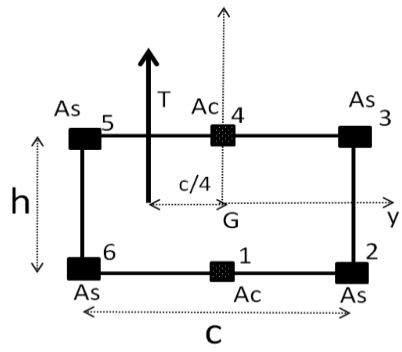
per x = 45, M= -1.3208e+07Nm

Nome:_________________________ Cognome:_______________________ Data: 19/01/2017

Esercizio N. 2	**Valutazione**	/6

Si supponga che il velivolo dell'esercizio precedente abbia un cassone alare composto da una sezione monocellulare rettangolare avente 4 solette ai vertici e due correnti interni come riportato in figura. La sezione è simmetrica con $h=1m$, e $c=5m$. L'area dei correnti centrali è Ac= 8cm^2 mentre i longheroni hanno le solette di area As=16cm^2. Correnti e solette sono di sezione quadrata.

Il cassone è sollecitato dalla forza di taglio Tz=20000 N (positiva verso l'alto e applicata come in figura) e da un momento flettente intorno all'asse y My= 70000Nm, a comprimere i correnti superiori. Si supponga che i pannelli lavorino a taglio e i correnti/solette a momento flettente (**modello a parametri concentrati**).



2.a Calcolare i momenti di inerzia della sezione utili al calcolo degli sforzi:

$$I_y = A_s h^2 + A_c \frac{h^2}{2} = 0.002 m^4$$

2.b Calcolare la distribuzione dei flussi di taglio **q** sui 6 pannelli resistenti, disegnandone qualitativamente l'andamento.

"Apro" la sezione dopo il corrente in 1, verso antiorario. Quindi:

$$q_{12}^* = 0\ ;\ q_{23}^* = \frac{T}{I_y} A_s \frac{h}{2};\ q_{34}^* = 0;\ q_{45}^* = -\frac{T}{I_y} A_c \frac{h}{2};\ q_{56}^* = -\frac{T}{I_y}(A_c + A_s)\frac{h}{2};\ q_{61}^* = -\frac{T}{I_y}(A_c)\frac{h}{2}$$

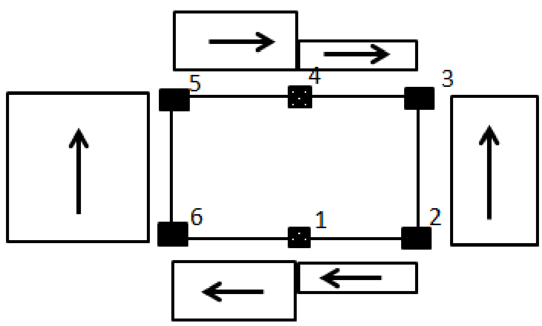
Per il bilancio del momento torcente, scelgo come polo il punto 6:

$$q_{23}^* hc + q_{45}^* h\frac{c}{2} + 2(hc)q_0 = T\frac{c}{2}$$

Valori numerici:

$$q_{12}^* = 0\ ;\ q_{23}^* = 8000 N/m;\ q_{34}^* = 0;\ q_{45}^* = -4000 N/m;\ q_{56}^* = -12000 N/m;\ q_{61}^* = -4000 N/m$$

$$q_0 = -500 N/m$$



Nome:__________________________ Cognome:________________________ Data: 19/01/2017

2.c Il valore del carico di compressione agente sui correnti e sulle solette.

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y}\left(\pm\frac{h}{2}\right) = \pm 17.5 MPa$$

2.d Verificare se i valori del carico di compressione agenti su solette e correnti superino il valore del carico critico, nell'ipotesi che solette e correnti siano assimilabili a travi in alluminio (E = 70GPa) aventi come condizioni agli estremi un appoggio, di lunghezza *l*= 2m e sezione assegnata nel testo sopra.

Carico sui correnti: $P_{cor} = \sigma A_c = 14kN$

Carico sulle solette: $P_{sol} = \sigma A_s = 28kN$

Momento di inerzia della sezione del corrente: $I_{cor} = \frac{1}{12}\left(\sqrt{A_c}\right)^4 = 5.3333\text{e-}08 m^4$

Momento di inerzia della sezione della soletta: $I_{sol} = \frac{1}{12}\left(\sqrt{A_s}\right)^4 = 2.1333\text{e-}07 m^4$

Carico critico del corrente: $P_{cor}^{crit} = \pi^2 \frac{EI_{cor}}{l^2} = 9211.6\text{N}$

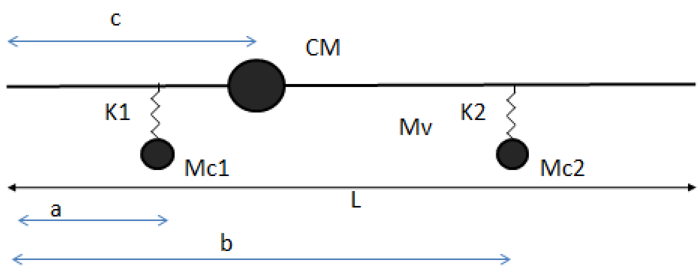
Carico critico della soletta: $P_{sol}^{crit} = \pi^2 \frac{EI_{sol}}{l^2} = 36.847\text{kN}$

Come si vede, mentre la soletta è stabile, il carico sul corrente eccede quello critico.

Nome:_________________________ Cognome:______________________ Data: 19/01/2017

Esercizio N. 3	**Valutazione**	/7

Il velivolo dell'esercizio 1 viene ora schematizzato da un punto di vista dinamico come un sistema a parametri concentrati costituito da una asta rigida di lunghezza L (fusoliera) la cui massa Mv = 20000kg è concentrata in c= 35m dalla prua del velivolo e un momento di inerzia pari a $J=10^7$ Kgm^2. I carrelli sono collegati alla fusoliera mediante molle di rigidezza K1= 700 KN/m e K2= 1400 KN/m ed hanno massa Mc1=1000Kg, Mc2=2000Kg.



Si supponga che il velivolo ancora non abbia toccato la pista di atterraggio, di trascurare gli spostamenti orizzontali e che le masse dei carrelli abbiamo solo uno spostamento verticale.

3.a Si assumano come gradi di libertà del sistema gli spostamenti verticali assoluti delle masse e la rotazione della fusoliera; si dimostri che tali variabili sono il numero necessario e sufficiente per applicare il metodo di Lagrange.

Se si escludono gli spostamenti orizzontali, i gradi di libertà sono 2 per l'asta (la fusoliera) e uno ciascuno per le masse (i carrelli). Non essendoci vincoli, il numero di gradi di libertà è dunque quattro: $\delta_v, \theta, \delta_{c1}, \delta_{c2}$.

3.b Scrivere l'energia cinetica T ed elastica U del sistema utilizzando come gradi di libertà quelli indicati al punto precedente;

$$T=\frac{1}{2}M_{c1}\dot{\delta}_{c1}^2+\frac{1}{2}M_{c2}\dot{\delta}_{c2}^2+\frac{1}{2}M_v\dot{\delta}_v^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

$$U=\frac{1}{2}K_1\left(\delta_{c1}^{rel}\right)^2+\frac{1}{2}K_2\left(\delta_{c2}^{rel}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}K_1\left(\delta_v-\theta(c-a)-\delta_{c1}\right)^2+\frac{1}{2}K_2\left(\delta_v+\theta(b-c)-\delta_{c2}\right)^2$$

3.c Scrivere le equazioni di equilibrio dinamico in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} M_{c1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{c2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\delta}_{c1} \\ \ddot{\delta}_{c2} \\ \ddot{\delta}_v \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} K_1 & 0 & -K_1 & K_1(c-a) \\ 0 & K_2 & -K_2 & K_2(c-b) \\ -K_1 & -K_2 & K_1+K_2 & K_1(a-c)+K_2(b-c) \\ K_1(c-a) & K_2(c-b) & K_1(a-c)+K_2(b-c) & K_1(a-c)^2+K_2(b-c)^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta_{c1} \\ \delta_{c2} \\ \delta_v \\ \theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nome:____________________________ Cognome:__________________________ Data: 19/01/2017

3.e Supponendo ora che il velivolo sia fermo sulla pista (ovvero che le masse dei due carrelli siano vincolate al suolo) come si modificano le equazioni della dinamica? Riportare le nuove equazioni di equilibrio in forma matriciale.

Se i carrelli al suolo sono schematizzati come appoggi al suolo, i gradi di libertà verticali dei carrelli sono soppressi. Le equazioni della dinamica del nuovo sistema si trovano eliminando le prime due righe e colonne del sistema precedente:

$$\begin{bmatrix} M_v & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\delta}_v \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} K_1+K_2 & K_1(a-c)+K_2(b-c) \\ K_1(a-c)+K_2(b-c) & K_1(a-c)^2+K_2(b-c)^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta_v \\ \theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.e Determinare le frequenze naturali di vibrazioni nelle ipotesi del punto precedente.

Bisogna porre:

$$\det\left(K-\omega^2 M\right)=0$$

O equivalentemente cercare gli autovalori di $M^{-1}K$

Risultato numerico: $\omega^2=\begin{bmatrix} 105.9 \\ 81.6 \end{bmatrix}, \omega=\begin{bmatrix} 10.29 \\ 9.03 \end{bmatrix}, f=\begin{bmatrix} 1.64 \\ 1.44 \end{bmatrix}$

Esercizio N. 4 **Valutazione** /4

Descrivere i passaggi fondamentali per analizzare la stabilità di una trave incastrata da un lato e libera dall'altro e soggetta ad un carico di compressione conservativo.

Nome:______________________________ Cognome:__________________________ Data: 19/01/2017

Esercizio N. 5	**Valutazione**	/4

Esercizio N. 6	**Valutazione**	/4