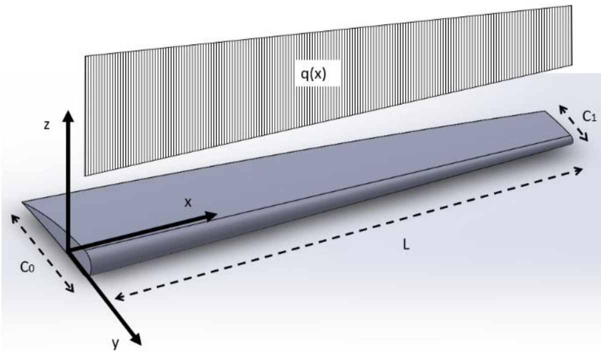
Nome:____________________________ Cognome:_________________________ Data: 17/01/2019

Esercizio N. 1	**Valutazione**	/6

Sia data una semiala la cui forma in pianta trapezoidale è ripotata in figura. L'allungamento della semiala è pari a λ = 5, la superficie della semiala è $S = 5m^2$, mentre le corde all'incastro con la fusoliera e all'estremo libero sono rispettivamente $c_0 = 1.5m$ e $c_1 = 0.5m$. Si supponga che il carico alare sia costante e pari a $Q = 1000 N/m^2$.



1a) Determinare la lunghezza della semiala L, l'andamento della corda lungo x, C(x) e la distribuzione del carico per unità di lunghezza q=q(x).

Considerando la formula per l'allungamento della semiala (Aspect Ratio) si ha che

$$\lambda = L^2 / S$$

dove L è la lunghezza della semiala. Si ottiene quindi che $L = 5m$.

L'andamento della corda si ottiene considerando che per x=0 si deve avere c0 e per x=L si deve avere c1

$$c(x) = c_0 - \frac{(c_0 - c_1)}{L} x$$

La distribuzione del carico per unità di lunghezza si può ottenere di conseguenza come

$$q(x) = Q\, c(x) = Q\left[c_0 - \frac{(c_0 - c_1)}{L} x\right]$$

1b) Supponendo che il carico q(x) sia applicato sulla linea che unisce le corde medie della semiala e che l'ala si comporti come una trave flessionale incastrata alla fusoliera con rigidezza flessionale media **e costante** pari a $EI = 2.5 \cdot 10^6 Nm^2$, si scriva l'equazione di equilibrio della trave inflessa in funzione dello spostamento w(x) con le relative condizioni al contorno

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2 w(x)}{dx^2}\right) = q(x)$$

$$+\,c.c.\;\; x = 0 \;\Rightarrow\; w(x) = 0,\;\; \frac{dw(x)}{dx} = 0$$

$$+\,c.c.\;\; x = L \Rightarrow\; \frac{d}{dx}\left(EI\,\frac{d^2 w(x)}{dx^2}\right) = 0,\;\; EI\,\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = 0$$

1c) Si determini l'andamento dello spostamento flessionale dell'ala w(x) e calcolarne il valore per x=L

$$EIw^{IV} = q(x)$$

Nome:____________________________ Cognome:_________________________ Data: 17/01/2019

$$w^{III} = \frac{1}{EI}\int_0^x Q\left[c_0 - \frac{(c_0-c_1)}{L}x\right]dx + A = \frac{1}{EI}\left(Q\left[c_0 x - \frac{(c_0-c_1)}{2L}x^2\right]\right) + A$$

$$w^{II} = \frac{1}{EI}\int_0^x Q\left[c_0 x - \frac{(c_0-c_1)}{2L}x^2\right]dx + Ax + B = \frac{1}{EI}\left(Q\left[\frac{c_0 x^2}{2} - \frac{(c_0-c_1)}{6L}x^3\right]\right) + Ax + B$$

$$w^{I} = \frac{1}{EI}\int_0^x Q\left[\frac{c_0 x^2}{2} - \frac{(c_0-c_1)}{6L}x^3\right]dx + \frac{Ax^2}{2} + Bx + C = \frac{1}{EI}\left(Q\left[\frac{c_0 x^3}{6} - \frac{(c_0-c_1)}{24L}x^4\right]\right) + \frac{Ax^2}{2} + Bx + C$$

$$w = \frac{1}{EI}\int_0^x Q\left[\frac{c_0 x^3}{6} - \frac{(c_0-c_1)}{24L}x^4\right]dx + \frac{Ax^3}{6} + \frac{Bx^2}{2} + Cx + D =$$

$$= \frac{1}{EI}\left(Q\left[\frac{c_0 x^4}{24} - \frac{(c_0-c_1)}{120L}x^5\right]\right) + \frac{Ax^3}{6} + \frac{Bx^2}{2} + Cx + D$$

Applicando le condizioni al contorno si ottiene che

$$w(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0$$
$$w^{I}(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

$$w^{III}(x=L) = 0 = \frac{1}{EI}\left(Q\left[c_0 x - \frac{(c_0-c_1)}{2L}x^2\right]\right) + A = \frac{1}{EI}\left(Q\left[c_0 L - \frac{(c_0-c_1)}{2L}L^2\right]\right) + A$$

$$A = -\frac{1}{EI}\left(Q\left[c_0 L - \frac{(c_0-c_1)}{2}L\right]\right)$$

$$w^{II}(x=L) = \frac{1}{EI}\left(Q\left[\frac{c_0 L^2}{2} - \frac{(c_0-c_1)}{6L}L^3\right]\right) + AL + B = 0$$

$$\frac{1}{EI}\left(Q\left[\frac{c_0 L^2}{2} - \frac{(c_0-c_1)}{6}L^2\right]\right) - \frac{1}{EI}\left(Q\left[c_0 L - \frac{(c_0-c_1)}{2}L\right]\right)L + B = 0$$

$$B = \frac{1}{EI}\left(Q\left[-\frac{c_0 L^2}{2} + \frac{(c_0-c_1)}{6}L^2 + c_0 L^2 - \frac{(c_0-c_1)}{2}L^2\right]\right) = \frac{1}{EI}Q\left(\frac{c_0 L^2}{2} - \frac{(c_0-c_1)}{3}L^2\right)$$

$$w = \frac{1}{EI}\left(Q\left[\frac{c_0 x^4}{24} - \frac{(c_0-c_1)}{120L}x^5\right]\right) + \frac{Ax^3}{6} + \frac{Bx^2}{2}$$

$$w(x=L) = 0.024m$$

1d) Le funzioni che descrivono le forze di taglio T(x) e momento flettente M(x), disegnandone l'andamento.

Nome:____________________________ Cognome:_________________________ Data: 17/01/2019

$$T(x) = -EIw^{III}(x) = -\left(Q\left[c_0 x - \frac{(c_0 - c_1)}{2L}x^2\right]\right) - EIA$$

$$M(x) = -EIw^{II}(x) = -\left(Q\left[\frac{c_0 x^2}{2} - \frac{(c_0 - c_1)}{6L}x^3\right]\right) - EIAx - EIB$$

Si verifica che taglio e momento all'estremità libera della semiala si annullino

$$T(x=L) = -EIw^{III}(L) = -EI\left(\frac{1}{EI}\left(Q\left[c_0 L - \frac{(c_0 - c_1)}{2L}L^2\right]\right) + A\right) =$$

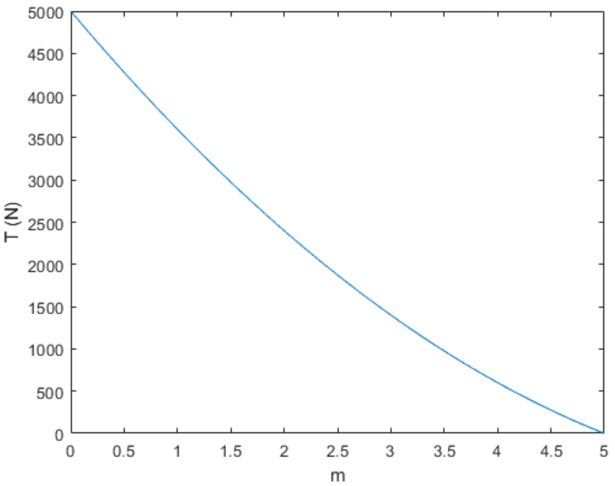
$$= -EI\left(\frac{1}{EI}\left(Q\left[c_0 L - \frac{(c_0 - c_1)}{2}L\right]\right) - \frac{1}{EI}\left(Q\left[c_0 L - \frac{(c_0 - c_1)}{2}L\right]\right)\right) =$$

$$= -EI\left(\frac{Q}{EI}\left(c_0 L - \frac{(c_0 - c_1)}{2}L - c_0 L + \frac{(c_0 - c_1)}{2}L\right)\right) = 0$$

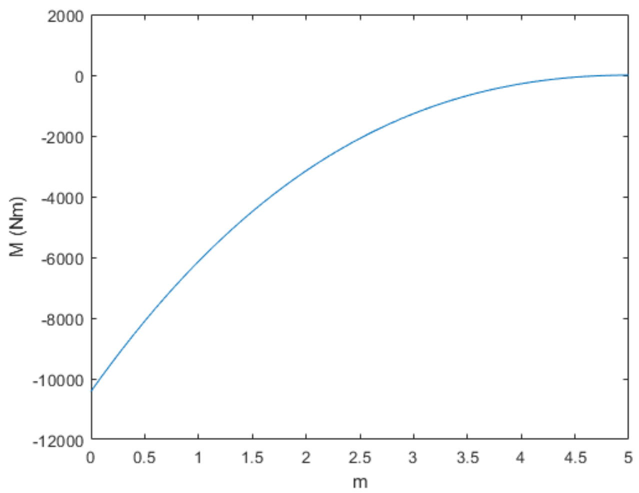
$$M(x=L) = -EIw^{II}(L) = -EI\left(\frac{Q}{EI}\left[\frac{c_0 L^2}{2} - \frac{(c_0 - c_1)}{6L}L^3\right] + AL + B\right) =$$

$$= -EI\left(\frac{Q}{EI}\left[\frac{c_0 L^2}{2} - \frac{(c_0 - c_1)}{6L}L^3\right] - \frac{1}{EI}\left(Q\left[c_0 L^2 - \frac{(c_0 - c_1)}{2}L^2\right]\right) + \frac{1}{EI}Q\left(\frac{c_0 L^2}{2} - \frac{(c_0 - c_1)}{3}L^2\right)\right) =$$

$$= -EI\left(\frac{Q}{EI}\left[\frac{c_0 L^2}{2} - \frac{(c_0 - c_1)}{6L}L^3 - c_0 L^2 + \frac{(c_0 - c_1)}{2}L^2 + \frac{c_0 L^2}{2} - \frac{(c_0 - c_1)}{3}L^2\right]\right) = 0$$



Nome:_________________________ Cognome:______________________ Data: 17/01/2019



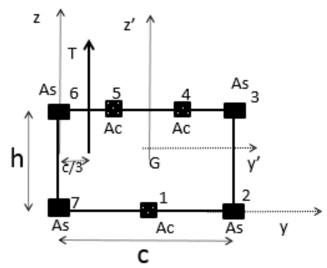
1e) I valori della forza di taglio T e del momento flettente M in x=0.

$$T(x=0) = -EIA = \left(Q\left[c_0 L - \frac{(c_0 - c_1)}{2} L\right]\right) = 5kN$$

$$M(x=0) = Q\left(\frac{c_0 L^2}{2} - \frac{(c_0 - c_1)}{3} L^2\right) = -10.4kNm$$

Esercizio N.2 **Valutazione** /5

In riferimento all'ala dell'esercizio precedente, si supponga che un tronco del suo cassone alare abbia le seguenti caratteristiche medie $h = 20cm, c = 70cm$. Il cassone, con pannelli di spessore t=2mm, possiede inoltre 4 solette di area $A_s = 5cm^2$ e tre correnti di area $A_c = 2.5cm^2$ disposti come in figura (i correnti 4 e 5 dividono in 3 parti uguali il pannello superiore). Si supponga inoltre che agisca sulla sezione una forza di taglio $T = 1000N$ posta ad una distanza pari a $c/3$ rispetto al longherone principale. Si supponga inoltre che il cassone sia realizzato in alluminio.



2.a Calcolare la posizione del baricentro e i momenti di inerzia centrali della sezione resistente, supponendo che solo gli irrigidimenti trasversali contribuiscono alla rigidezza flessionale.

La posizione del baricentro sarà (rispetto al punto 7 in figura) e assi y' e z' paralleli a y e z

$$y_G = c/2 = 0.35m$$

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{7} A_i z'_i}{\sum_{i=1}^{7} A_i} = 0.109m$$

Nome:____________________________ Cognome:__________________________ Data: 17/01/2019

Il momento d'inerzia Iy rispetto al baricentro G sarà

$$h_T = h - z_G$$
$$h_B = z_{Gs}$$
$$I_y = \sum_{i=1}^{7} A_i \left(z'_i - z_G\right)^2 = \left(2A_s h_T^2 + 2A_c h_T^2 + 2A_s h_B^2 + A_c h_B^2\right) = 2.7273e-5m^4$$

2.b Calcolare i flussi di taglio sui pannelli di rivestimento, graficandone qualitativamente l'andamento.

"Apro" la sezione dopo il corrente in 1, verso antiorario. Quindi:

$q_{12}^* = 0$;

$q_{23}^* = q_{12}^* - \frac{T}{I_y} A_s \left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{T}{I_y} A_s \left(h_B\right) = 2000N/m$;

$q_{34}^* = q_{23}^* - \frac{T}{I_y} A_s \left(h_T\right) = 333.33N/m$;

$q_{45}^* = q_{34}^* - \frac{T}{I_y} A_c h_T = -500N/m$;

$q_{56}^* = q_{45}^* - \frac{T}{I_y} \left(A_c\right) h_T = -1333.33N/m$;

$q_{67}^* = q_{56}^* - \frac{T}{I_y} \left(A_s\right) h_T = -3000N/m$

$q_{71}^* = q_{67}^* - \frac{T}{I_y} \left(A_s\right)\left(-h_B\right) = -1000N/m$

Verifica sulle forze interne (devono equivalere ai carichi applicati):

Lungo y (direzione orizzontale)

$$F_{12} + F_{34} + F_{45} + F_{56} + F_{71} = q_{12}^* \frac{c}{2} - q_{34}^* \frac{c}{3} - q_{45}^* \frac{c}{3} - q_{56}^* \frac{c}{3} + q_{71}^* \frac{c}{2} = 0$$

Lungo z (direzione verticale)

$$F_{23} + F_{67} = q_{23}^* h - q_{67}^* h = T$$

Calcolo di q0 (bilancio momento torcente scegliendo come polo il punto 7)

$$q_{23}^* hc + q_{34}^* h \frac{c}{3} + q_{45}^* h \frac{c}{3} + q_{56}^* h \frac{c}{3} + 2hcq_0 = T\frac{c}{3}$$
$$q_0 = 83.33N/m$$

2.c Calcolare la rigidezza di Bredt della sezione resistente.

$$G = \frac{E}{2(1+v)} = 2.7e10$$

Nome:___________________________ Cognome:__________________________ Data: 17/01/2019

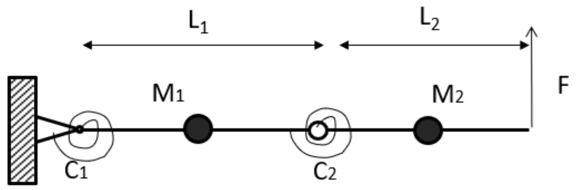
$$B=\frac{4(hc)^2tG}{2h+2c}=2.36e6N/m^2$$

2.d Calcolare la espressione analitica dell'angolo di torsione relativo $\frac{d\varphi}{dx}$

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{1}{B}M_t=\frac{1}{B}\left(T\frac{c}{6}\right)=4.95e-5rad/m$$

Esercizio N. 3 **Valutazione** /6

L'ala di un velivolo è schematizzata a livello dinamico come formata da due aste rigide (lunghezza L1 = 15m e L2 = 10 m) con masse concentrate M1 = 2500 kg e M2 = 1000 kg in mezzeria, sottoposta all'azione della portanza costante e verticale F = 320 kN concentrata all'estremità, come in figura. Tra le aste sono poste due molle torsionali C1 = 2.75e8 Nm2 e C2 = 9e7 Nm2



3a. Dimostrare che i gradi di libertà del sistema dinamico proposto sono 2

$$\mathrm{GDL}=3\mathrm{x}2-2-2=2$$

3b. Assumendo come variabili lagrangiane le rotazioni assolute, determinare le espressioni dell'energia cinetica, elastica e collegata al lavoro della forza F

$$\mathrm{T}=\frac{1}{8}\mathrm{M}_1\mathrm{L}_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}\mathrm{M}_2(\mathrm{L}_1\dot{\theta}_1+\frac{\mathrm{L}_2}{2}\dot{\theta}_2)^2$$
$$\mathrm{U}=\frac{1}{2}\mathrm{C}_1\theta_1^2+\frac{1}{2}\mathrm{C}_2(\theta_2-\theta_1)^2$$
$$\mathrm{V}=\mathrm{F}(\mathrm{L}_1\theta_1+\mathrm{L}_2\theta_2)$$

3c. Scrivere le equazioni della dinamica (incluso l'effetto della forza F)

Nome:___________________________ Cognome:________________________ Data: 17/01/2019

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}M_1L_1^2 + M_2L_1^2 & \frac{1}{2}M_2L_1L_2 \\ \frac{1}{2}M_2L_1L_2 & \frac{1}{4}M_2L_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} FL_1 \\ FL_2 \end{Bmatrix}$$

3d. Determinare la configurazione deformata dell'ala a stazionario (condizioni di equilibrio).

$$\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} FL_1 \\ FL_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1 &= 6.46x10^{-2}\,\text{rad} = 3.70^\circ \\ \bar{\theta}_2 &= 2.91x10^{-2}\,\text{rad} = 1.67^\circ \end{aligned}$$

3e Determinare le frequenze proprie e i modi (disegnandoli) del sistema.

$$\omega^2 = \begin{Bmatrix} 4.59x10^2 \\ 1.53x10^4 \end{Bmatrix}$$

$$f = \begin{Bmatrix} 3.41 \\ 19.71 \end{Bmatrix} \text{Hz}$$

$$u_1 = \begin{Bmatrix} -5.337x10^{-1} \\ -8.4568x10^{-1} \end{Bmatrix}$$

$$u_2 = \begin{Bmatrix} 2.3022x10^{-1} \\ -9.7314x10^{-1} \end{Bmatrix}$$

Nome:___________________________ Cognome:________________________ Data: 17/01/2019

Esercizio N. 4	**Valutazione**	/4

Nello studio della stabilità di un sistema strutturale il carico critico Pcr si ottiene in corrispondenza di una frequenza di vibrazione nulla. E' possibile? Se sì, in quale condizione di carico questo avviene? Motivare la risposta.

Esercizio N. 5	**Valutazione**	/5

Volendo utilizzare il metodo approssimato di Galeerkin per la determinazione approssimata del carico critico di una trave incastrata su un lato e libera nell'altro con quali criteri scegliereste le funzioni approssimanti il campo di spostamento, e quali passaggi analitici fareste per scrivere la trasformazione dell'equazione differenziale nella sua forma discreta?

Nome:___________________________ Cognome:________________________ Data: 17/01/2019

Esercizio N. 6	**Valutazione**	/4

Descrivere il problema aeroelastico dell'inversione dei comandi utilizzando il modello semirigido dell'ala e dell'alettone.