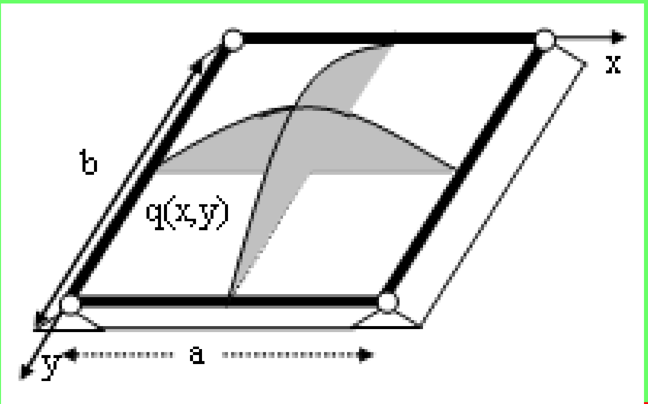
COSTRUZIONI AEROSPAZIALI

Complementi alla teoria della piastra

Soluzioni approssimate per la piastra appoggiata

–La piastra appoggiata con $q=s_m s_n$



$$D\nabla^4 w = q_0 \mathrm{sen}(\frac{\pi x}{a})\mathrm{sen}(\frac{\pi y}{b})$$

$$\begin{cases} w(0,y) = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0} = 0 \\ w(a,y) = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} = 0 \\ w(x,0) = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=0} = 0 \\ w(x,b) = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b} = 0 \end{cases}$$

Si assume:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} w_{mn} \mathrm{sen}\frac{m\pi x}{a}\mathrm{sen}\frac{n\pi y}{b}$$

–La piastra appoggiata

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]=q \quad ; \quad w(x,y)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} w_{mn}\,\mathrm{sen}\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{sen}\frac{n\pi y}{b}$$

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} w_{mn}[(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2]^2\mathrm{sen}(\frac{m\pi x}{a})\mathrm{sen}(\frac{n\pi y}{b})=q_0\mathrm{sen}(\frac{\pi x}{a})\mathrm{sen}(\frac{\pi y}{b})$$

che, per il principio di identità delle serie, risulta soddisfatta se:

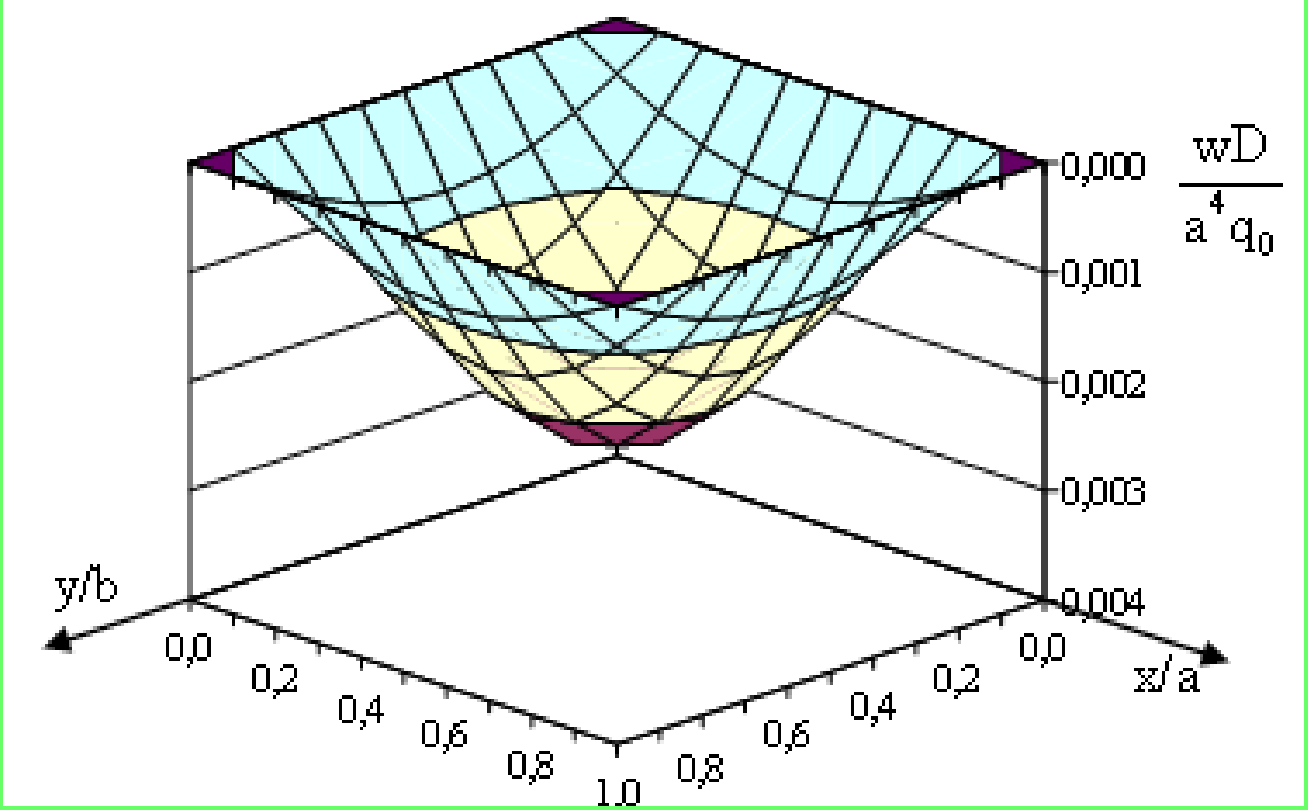
$$w_{11}[(\frac{\pi}{a})^2+(\frac{\pi}{b})^2]^2=\frac{q_0}{D} \quad ; \text{ per } m=n=1$$

$$w_{12}=w_{21}=....=w_{mn}=0; \text{ per } m,n=2,3,...$$

$$w=\frac{a^4 q_0}{D}\frac{1}{\pi^4(1+\rho^2)^2}\mathrm{sen}(\frac{\pi x}{a})\mathrm{sen}(\frac{\pi y}{b})$$

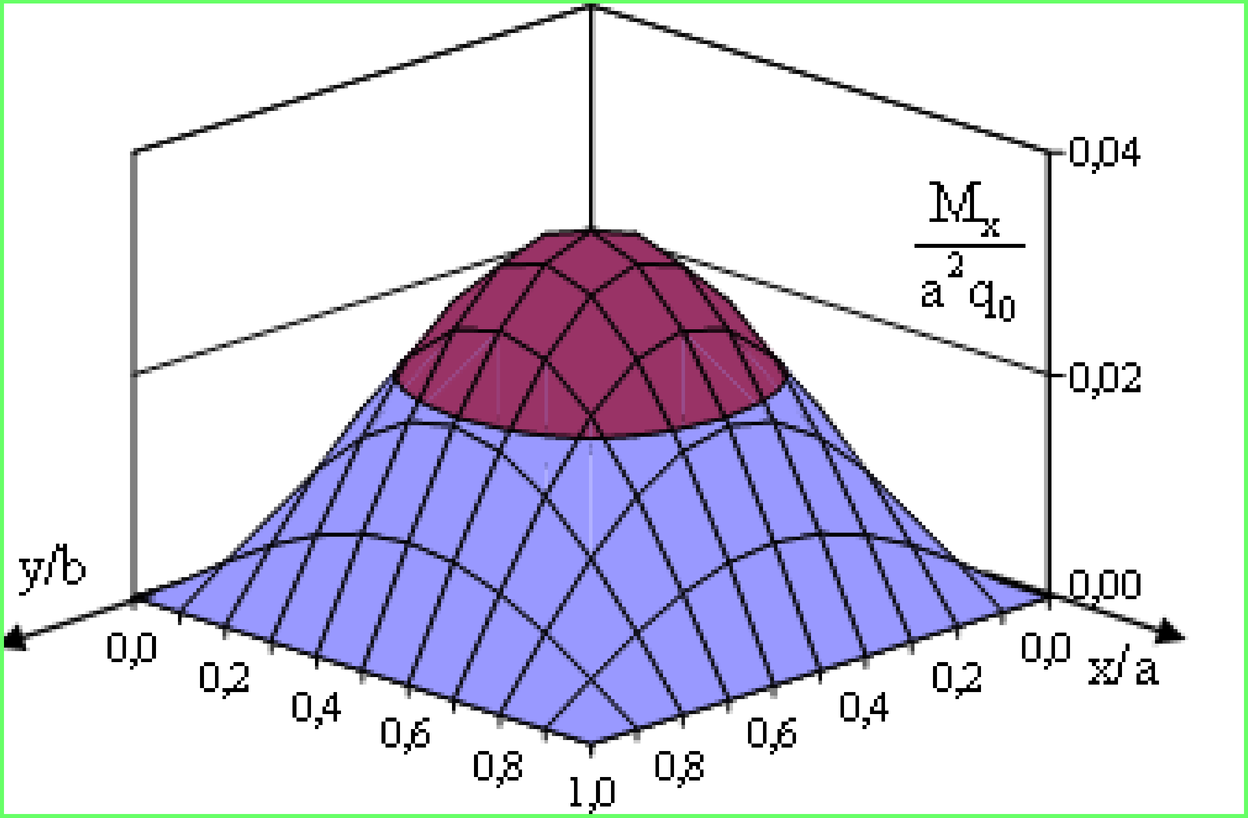
Piastra appoggiata, $q=q_0$=costante

$$w = \frac{a^4 q_0}{D}\frac{1}{\pi^4(1+\rho^2)^2}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$



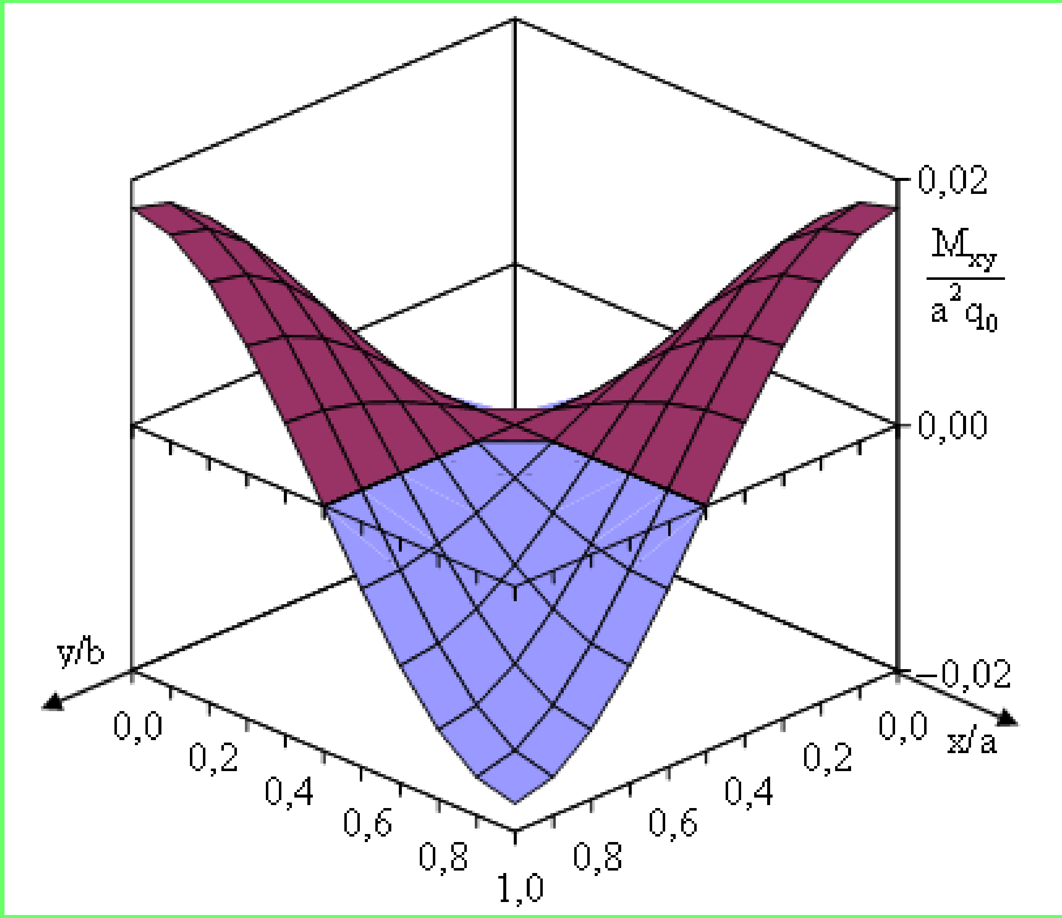
–La piastra appoggiata

$$\begin{cases} M_x = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \dfrac{q_0 a^2}{\pi^2} \dfrac{1+\nu\rho^2}{(1+\rho^2)^2} \operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{a} \operatorname{sen}\dfrac{\pi y}{b} \\ M_y = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \dfrac{q_0 a^2}{\pi^2} \dfrac{\rho^2+\nu}{(1+\rho^2)^2} \operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{a} \operatorname{sen}\dfrac{\pi y}{b} \end{cases}$$



–La piastra appoggiata

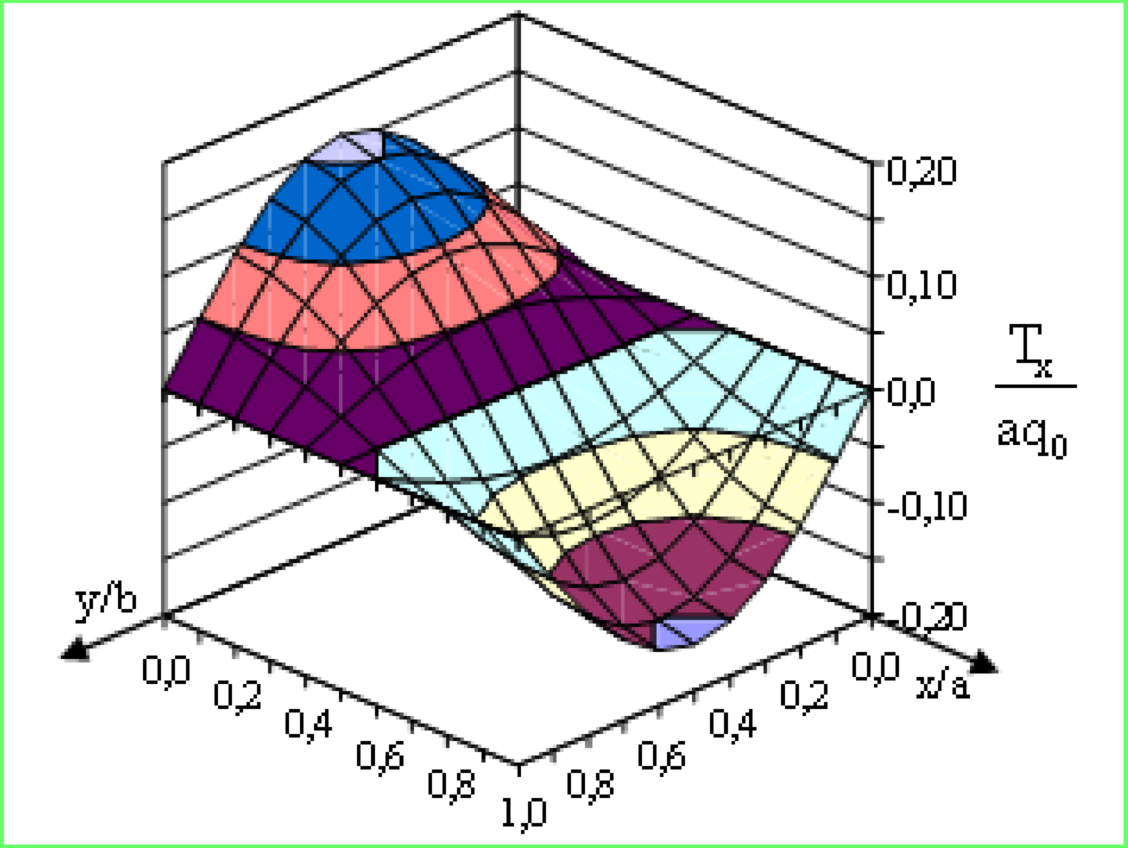
$$M_{xy} = -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{q_0 a^2}{\pi^2}\frac{\rho(1-\nu)}{(1+\rho^2)^2}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}$$



–La piastra appoggiata

$$T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = \frac{aq_0}{\pi}\frac{1}{(1+\rho^2)}\cos\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{sen}\frac{\pi y}{b}$$

$$T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \frac{aq_0}{\pi}\frac{\rho}{(1+\rho^2)}\,\mathrm{sen}\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}$$



–La piastra appoggiata

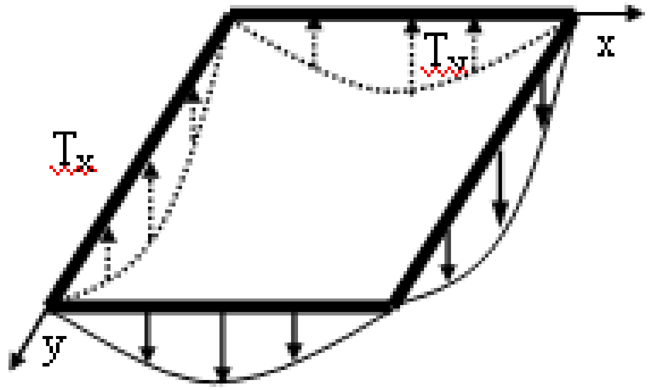
In particolare sul contorno, con la convenzione assunta e mostrata in figura dei versi delle forze:

$$(T_x)_{x=0,a} = \pm \frac{aq_0}{\pi} \frac{1}{(1+\rho^2)} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

$$(T_x)_{y=0} = (T_x)_{y=b} = 0$$

$$(T_y)_{y=0,b} = \pm \frac{aq_0}{\pi} \frac{\rho}{(1+\rho^2)} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}$$

$$(T_y)_{x=0} = (T_y)_{x=a} = 0$$



dove il segno + vale per x=y=0 ed il segno – sui lati opposti.

–La piastra appoggiata

Integrando sui lati del contorno su cui operano:

$$\int_0^b (T_x)_{x=0}\,dy = \frac{2q_0a^2}{\pi^2\rho}\,\frac{1}{(1+\rho^2)}$$

$$\int_0^b (T_x)_{x=a}\,dy = -\frac{2q_0a^2}{\pi^2\rho}\,\frac{1}{(1+\rho^2)}$$

$$\int_0^a (T_y)_{y=0}\,dx = \frac{2a^2q_0}{\pi^2}\,\frac{\rho}{(1+\rho^2)}$$

$$\int_0^a (T_y)_{y=b}\,dx = -\frac{2a^2q_0}{\pi^2}\,\frac{\rho}{(1+\rho^2)}$$

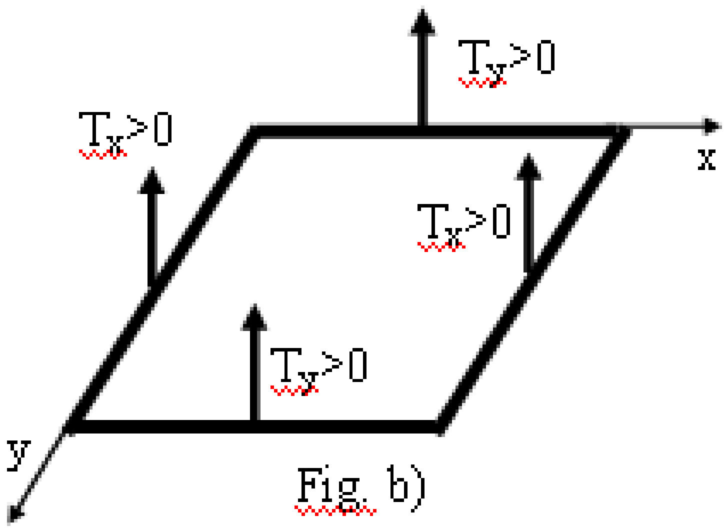


Fig. b)

il cui valore:

– positivo sui lati x=0 ed y=0 indica che il verso delle rispettive T coincide con quello di fig. a);

– negativo sui lati x=a ed y=b indica che il verso delle rispettive T è opposto a quello di fig. a);

–La piastra appoggiata

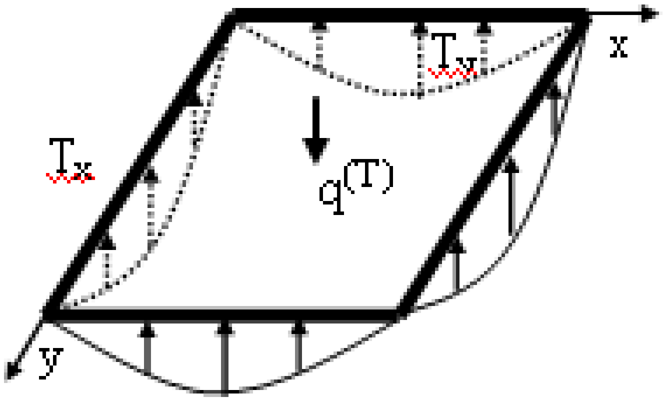
I versi delle forze T sono quindi quelle di fig. b), e come tali sono reazioni vincolari; la risultante (verso l'alto) delle (10) su tutto il contorno Γ:

$$\frac{T_r}{q_0 a^2} = \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{1}{(1+\rho^2)\rho} + \frac{\rho}{(1+\rho^2)}\right] = \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{1+\rho^2}{(1+\rho^2)\rho}\right] = \frac{4}{\pi^2\rho} = 0,4053$$

equilibra il carico totale applicato (verso il basso), infatti:

$$q^{(T)} = q_0 \int_0^a\int_0^b \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy = \frac{4 q_0 a^2}{\pi^2\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{q^{(T)}}{q_0 a^2} = \frac{4}{\pi^2\rho} = 0,4053$$



–La piastra appoggiata

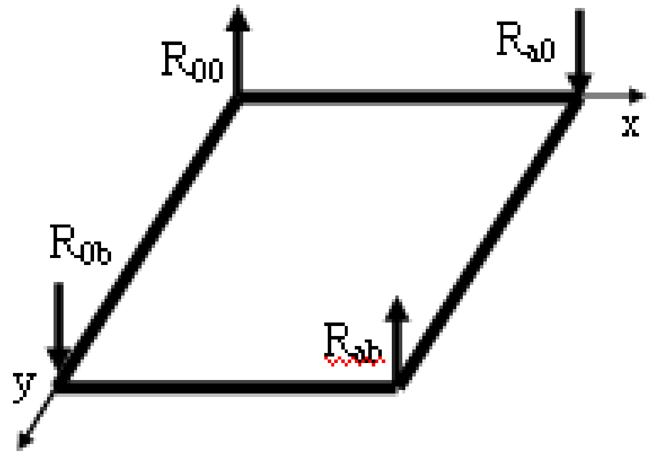
Oltre alla suddetta reazione distribuita sono presenti anche delle reazioni concentrate agli spigoli dovute al momento misto $M_{xy}\neq 0$ e precisamente, con la convenzione assunta e mostrata in figura dei versi delle forze:

$$\frac{R_{00}}{q_0 a^2} = \frac{2}{q_0 a^2}(M_{xy})_{\substack{x=0\\y=0}} = -\frac{2}{\pi^2}\frac{(1-\nu)\rho}{(1+\rho^2)^2} = -0{,}03546$$

$$\frac{R_{a0}}{q_0 a^2} = \frac{2}{q_0 a^2}(M_{xy})_{\substack{x=a\\y=0}} = -\frac{R_{00}}{q_0 a^2}$$

$$\frac{R_{ab}}{q_0 a^2} = \frac{2}{q_0 a^2}(M_{xy})_{\substack{x=a\\y=b}} = \frac{R_{00}}{q_0 a^2}$$

$$\frac{R_{0b}}{q_0 a^2} = \frac{2}{q_0 a^2}(M_{xy})_{\substack{x=0\\y=b}} = -\frac{R_{00}}{q_0 a^2}$$



Con considerazioni analoghe a quelle precedentemente fatte sui versi delle T, risulta che l'effettivo verso delle R_{ij} è verso il basso e come tali sono reazioni che deve esplicare il vincolo.

–La piastra appoggiata

La risultante delle R_{ij} (verso il basso):

$$\frac{R}{q_0 a^2} = \frac{8}{\pi^2} \frac{(1-\nu)\rho}{(1+\rho^2)^2} = 0,1419$$

equilibra il seguente taglio, equivalente ad M_{xy}, che si genera al contorno:

$$(Q_x)_{x=0,a} = \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{x=0,a} = \pm \frac{q_0 a}{\pi} \frac{(1-\nu)\rho^2}{(1+\rho^2)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}$$

(14) $$(Q_y)_{y=0,b} = \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right)_{y=0,b} = \pm \frac{q_0 a}{\pi} \frac{\rho(1-\nu)}{(1+\rho^2)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}$$

$$(Q_x)_{y=0} = (Q_x)_{y=b} = (Q_y)_{x=0} = (Q_y)_{x=a} = 0$$

dove il + vale per x=y=0 ed il – sui lati opposti.

–La piastra appoggiata

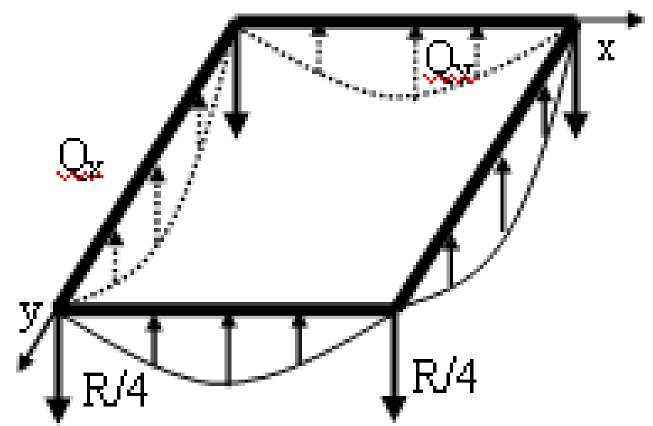
Integrando sul contorno:

$$\int_0^b (Q_x)_{x=0}\,dy = \frac{2q_0a^2}{\pi^2}\frac{\rho(1-\nu)}{(1+\rho^2)^2}$$

$$\int_0^b (Q_x)_{x=a}\,dy = -\frac{2q_0a^2}{\pi^2}\frac{\rho(1-\nu)}{(1+\rho^2)^2}$$

$$\int_0^a (Q_y)_{y=0}\,dx = \frac{2q_0a^2}{\pi^2}\frac{\rho(1-\nu)}{(1+\rho^2)^2}$$

$$\int_0^a (Q_y)_{y=b}\,dx = -\frac{2q_0a^2}{\pi^2}\frac{\rho(1-\nu)}{(1+\rho^2)^2}$$



la cui risultante (verso l'alto) su tutto il contorno Γ:

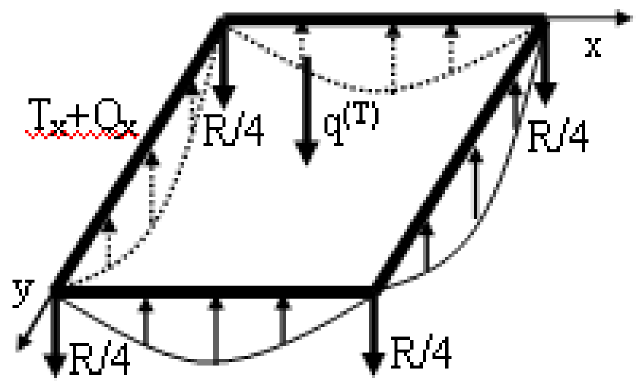
$$\frac{Q_\Gamma}{q_0a^2} = \frac{8}{\pi^2}\frac{\rho(1-\nu)}{(1+\rho^2)^2} = 0,1419$$

–La piastra appoggiata

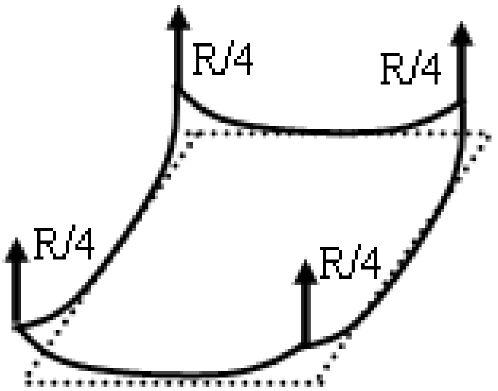
Pertanto è rispettato l'equilibrio delle forze verticali che, con le notazioni di figura dove T_r , Q_r , R rappresentano le reazioni che deve esplicare l'appoggio, si scrivono:

$$T_r + Q_r - R = q^{(T)}$$

$$0,4053 + 0,1419 - 0,1419 = 0,4053$$

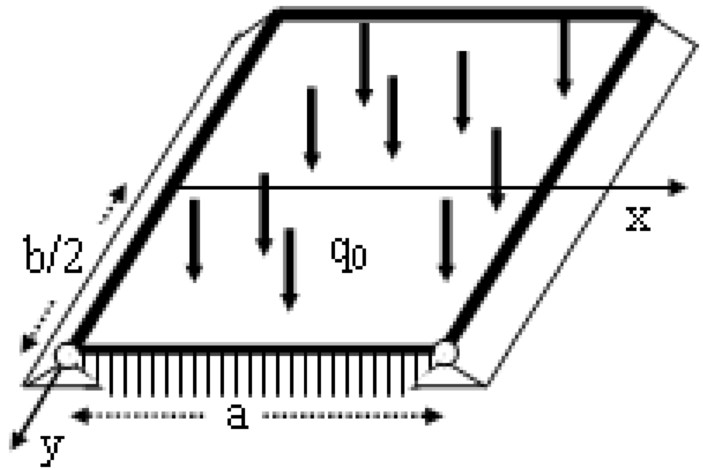


Data la presenza delle forze concentrate, in una piastra rettangolare appoggiata al contorno e caricata con un carico q, qualora il vincolo fosse inadeguato a fornire un sufficiente ancoraggio specie agli spigoli, questi tenderebbero ad alzarsi, come mostrato in figura.



La piastra con due lati appoggiati e due incastrati

Per una piastra di lati a,b appoggiata sui lati x=0,x=a ed incastrata sui lati y=±b/2 soggetta ad un carico q_0 costante, l'equazione nel campo si scrive:



$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_0}{D} \tag{10.1}$$

a cui vanno associate le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} w_{x=0,a} = 0 \\ M_{x=0,a} = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0,a} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \tag{10.2}$$

$$w_{y=\pm b/2} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\pm b/2} = 0 \tag{10.3}$$

La piastra con due lati appoggiati e due incastrati

La soluzione della (10.1), che soddisfa le (10.2) volendo seguire la procedura B) del par. 8, può essere ottenuta come:

(10.4) $$w = \sum_{m=1,2,...}^{M} Y_m(y)\,\mathrm{sen}\frac{m\pi x}{a}$$

Sostituendo la (10.4) nella (10.1) ed indicando con numeri romani la derivazione rispetto ad y:

(10.5) $$\sum_{m=1}^{M}\left[Y_m^{IV} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 Y_m^{II} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 Y_m\right]\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = \frac{q_0}{D}$$

che, posto:

(10.6) $$q_0 = \sum_{m=1}^{M} q_m\,\mathrm{sen}\frac{m\pi x}{a} \Rightarrow q_m = \begin{cases}\dfrac{4q_0}{m\pi} & ; \quad m = 1,3,.. \\ 0 & ; \quad m = 2,4,..\end{cases}$$

è soddisfatta per qualsiasi valore di x se:

(10.7) $$\begin{aligned} &Y_m^{IV} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 Y_m^{II} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 Y_m = \frac{4q_0}{m\pi D} \quad ; \quad m = 1,3,.. \\ &Y_m^{IV} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 Y_m^{II} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 Y_m = 0 \quad ; \quad m = 2,4,.. \end{aligned}$$

La piastra con due lati appoggiati e due incastrati

L' integrale particolare della prima delle (10.7) risulta:

$$(10.8) \qquad Y_m^p = \frac{4}{(m\pi)^5}\frac{a^4 q_0}{D}$$

mentre, ponendo:

$$(10.9) \qquad \rho = \frac{a}{b}\ ;\ \xi = \frac{x}{a}\ ;\ \eta = \frac{y}{b}\ ;\ \lambda_m = \frac{m\pi}{\rho} \Rightarrow \frac{m\pi y}{a} = \lambda_m \eta$$

l'integrale dell'omogenea associata risulta:

$$(10.10) \quad Y_m(\eta) = A_m Ch(\lambda_m \eta) + B_m \eta Sh(\lambda_m \eta) + C_m Sh(\lambda_m \eta) + D_m \eta Ch(\lambda_m \eta)]$$

dove A_m, B_m, C_m, D_m sono costanti che si determinano imponendo le (10.3).

La piastra con due lati appoggiati e due incastrati

Per la simmetria della struttura e del carico rispetto all'asse di mezzeria ξ, deve risultare $Y_m(\eta)=Y_m(-\eta)$, quindi nella (10.10) i termini emi-simmetrici (quelli dove compaiono C_m e D_m) devono essere nulli; ponendo $C_m=D_m=0$:

(10.11) $$Y_m = A_m \mathrm{Ch}(\lambda_m \eta) + B_m \eta \mathrm{Sh}(\lambda_m \eta)$$

In definitiva l'integrale generale della (10.7) si scrive:

(10.12) $$w = \sum_{m=1,2..}^{M} \left[\frac{q_0 a^4}{D} \frac{4}{(m\pi)^5} + Y_m(\eta)\right] \mathrm{sen}(m\pi\xi)$$

La piastra con due lati appoggiati e due incastrati

Imponendo le condizioni al contorno (10.3):

$$(10.13)\quad \begin{aligned} & w_{\eta=\pm 1/2}=0 \Rightarrow \frac{q_0 a^4}{D}\frac{4}{(m\pi)^5}+A_m Ch(\frac{\lambda_m}{2})+\frac{B_m}{2}Sh(\frac{\lambda_m}{2})=0\ ;\ m=1,3,.. \\ & w_{\eta=\pm 1/2}=0 \Rightarrow A_m Ch(\frac{\lambda_m}{2})+\frac{B_m}{2}Sh(\frac{\lambda_m}{2})=0 \qquad ;\ m=2,4,.. \end{aligned}$$

$$(10.14)\ (\frac{\partial w}{\partial \eta})_{\eta=\pm\frac{1}{2}}=0 \Rightarrow [A_m\lambda_m+B_m]Sh(\frac{\lambda_m}{2})+\frac{B_m\lambda_m}{2}Ch(\frac{\lambda_m}{2})=0;\ m=1,2,..$$

che costituiscono un sistema in A_m e B_m le cui soluzioni sono:

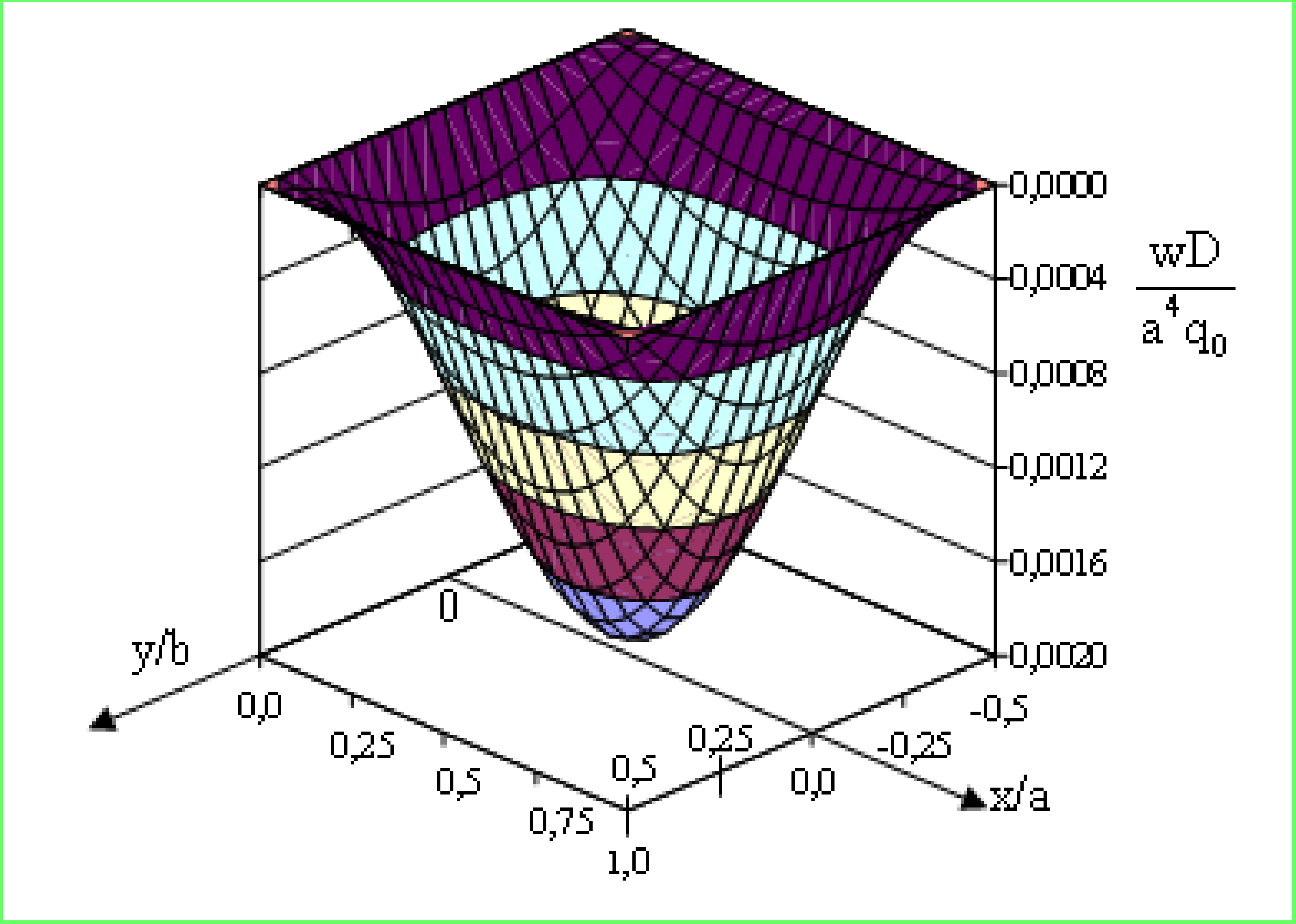
– per i termini m=1,3,5, … per i quali il sistema è non omogeneo:

$$(10.15)\quad \begin{cases} A_m^* = \dfrac{A_m D}{q_0 a^4} = -\dfrac{4}{(m\pi)^5}\dfrac{2Sh(\lambda_m/2)+\lambda_m Ch(\lambda_m/2)}{\lambda_m+2Ch(\lambda_m/2)Sh(\lambda_m/2)} \\ B_m^* = \dfrac{B_m D}{q_0 a^4} = \dfrac{4}{(m\pi)^5}\dfrac{2\lambda_m Sh(\lambda_m/2)}{\lambda_m+2Ch(\lambda_m/2)Sh(\lambda_m/2)} \end{cases} ;\ m=1,3,5,..$$

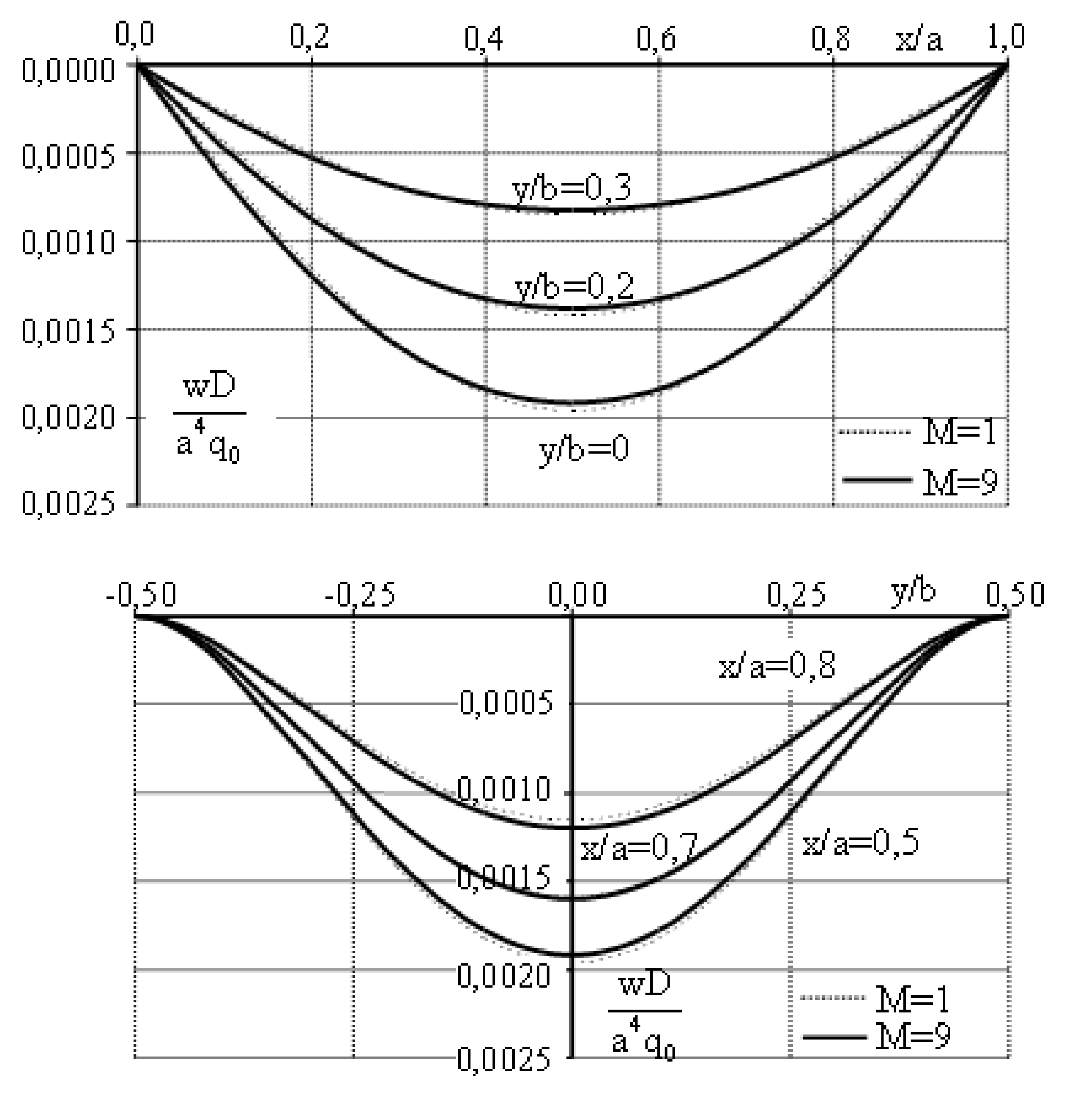
– per i termini m=2,4,6, … per i quali il sistema è omogeneo:

$$A_m^* = B_m^* = 0\ ;\ m=2,4,6,..$$

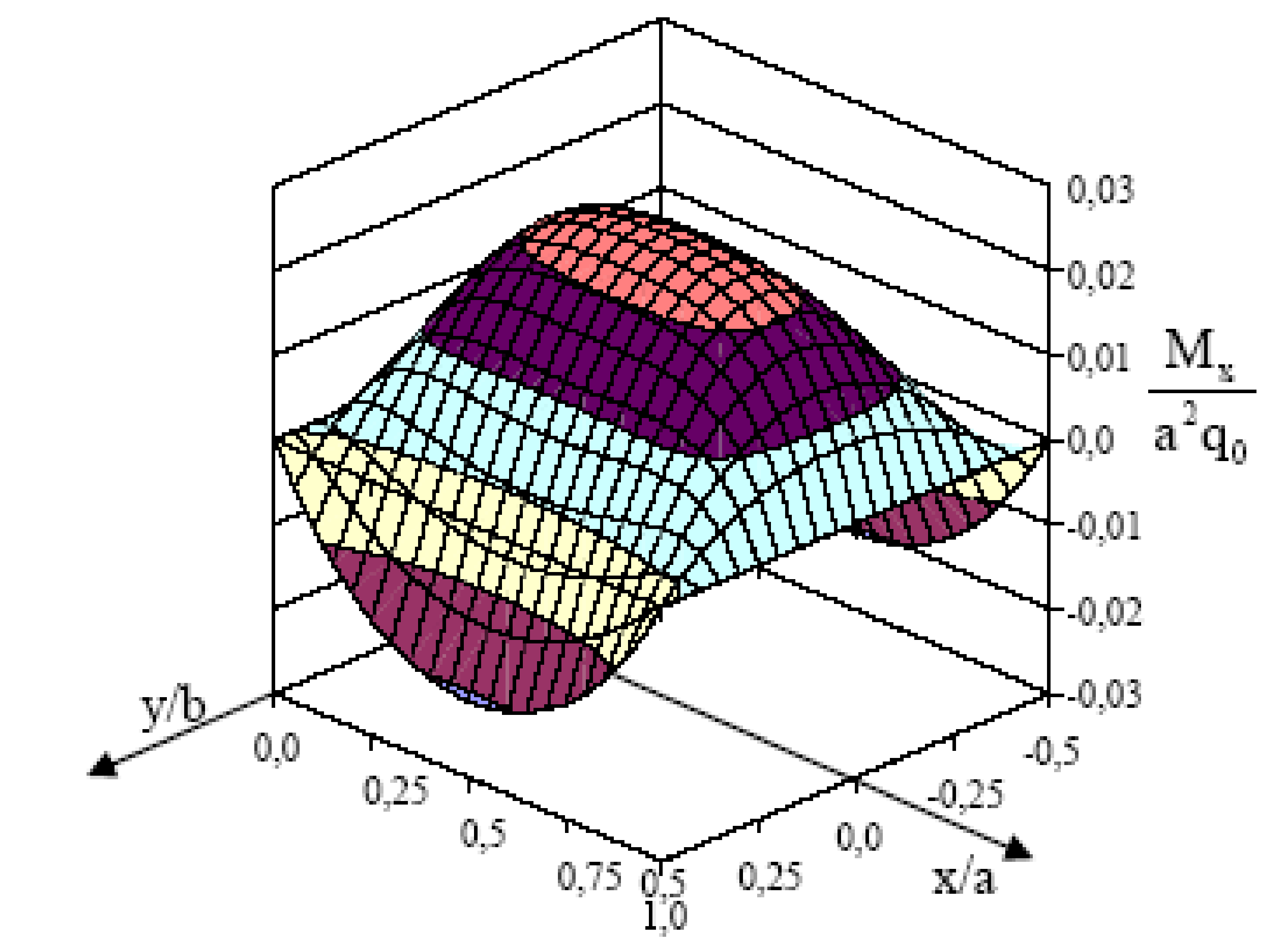
La piastra con due lati appoggiati e due incastrati (a=b)



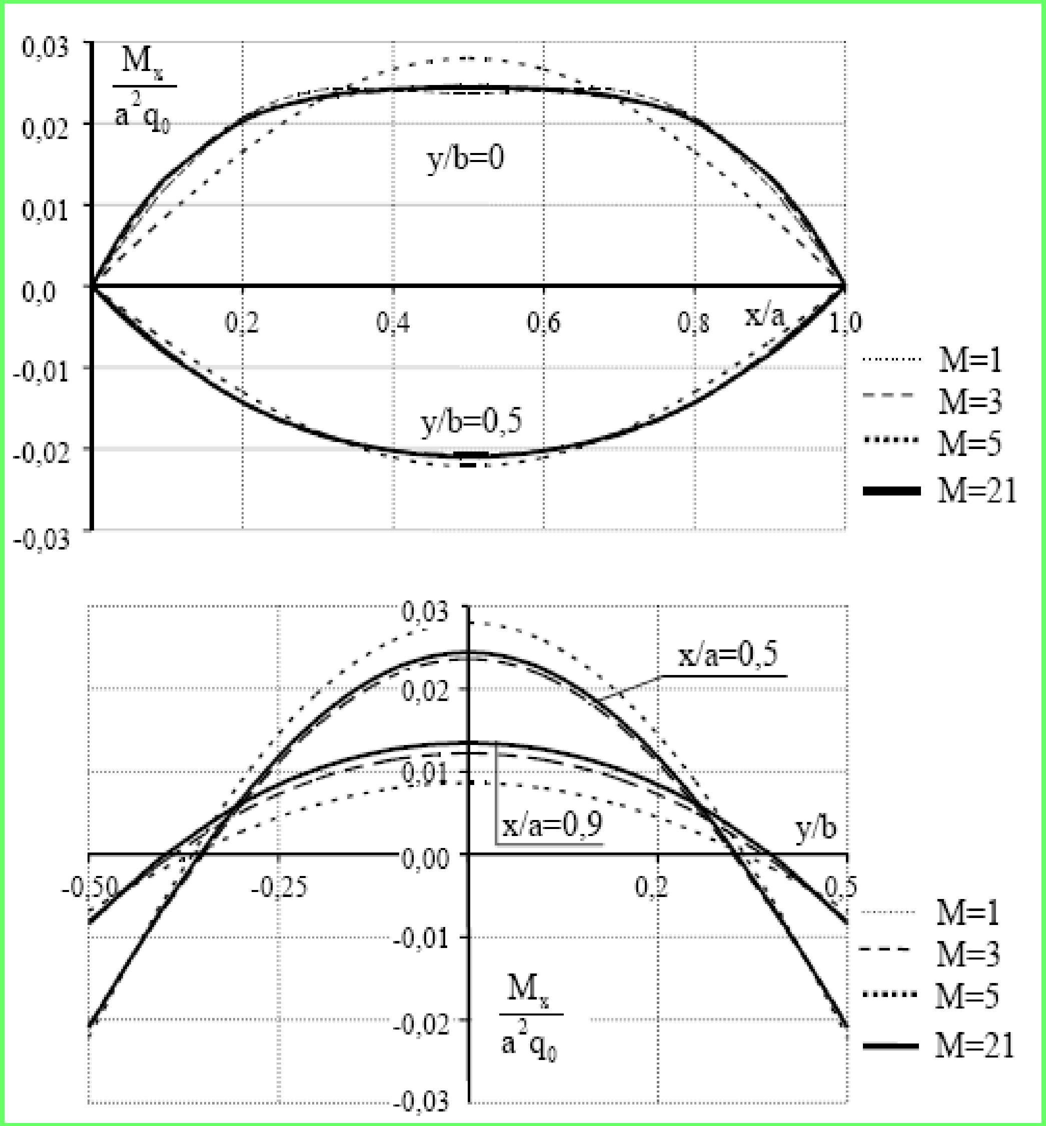
La piastra con due lati appoggiati e due incastrati (a=b)



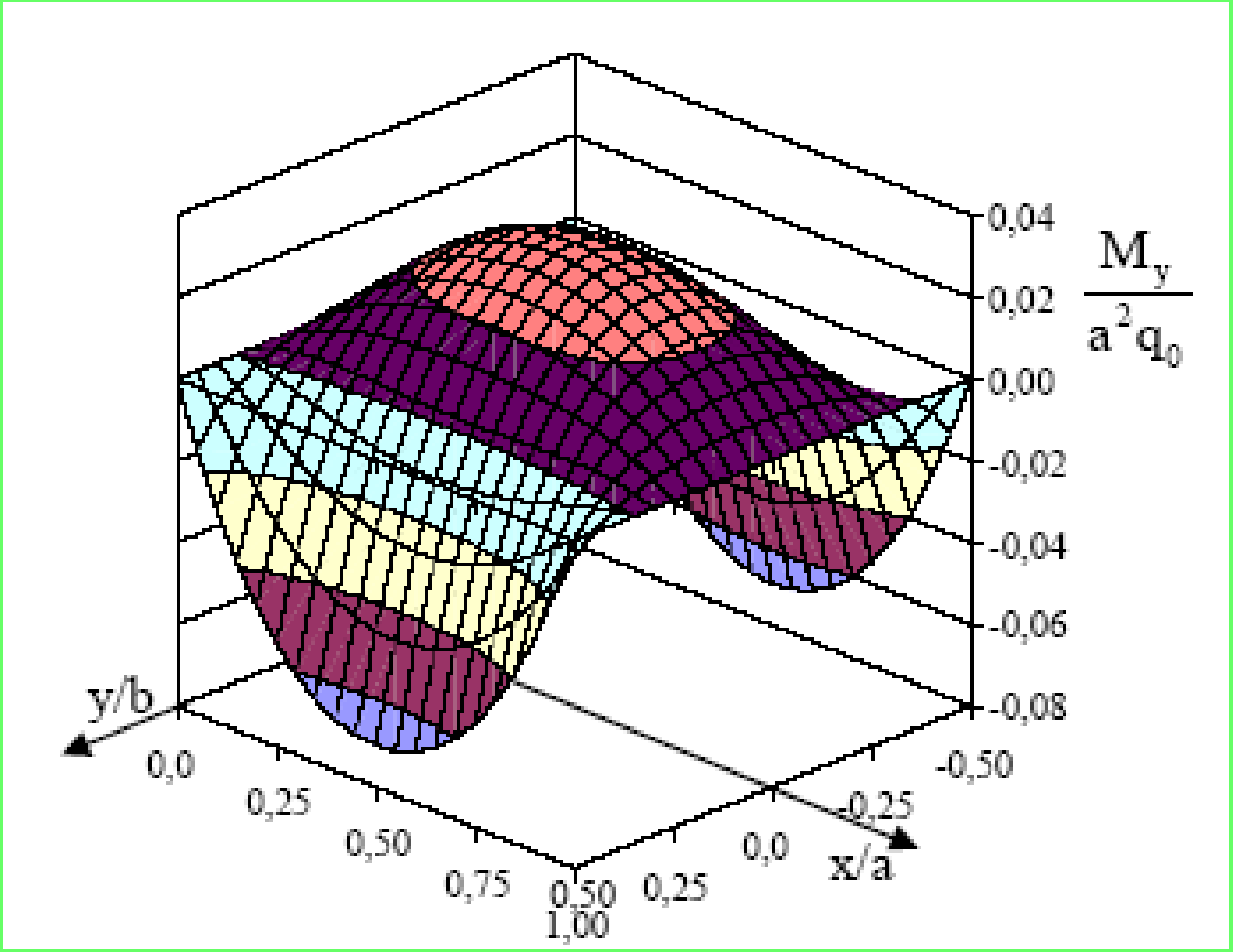
La piastra con due lati appoggiati e due incastrati (a=b)



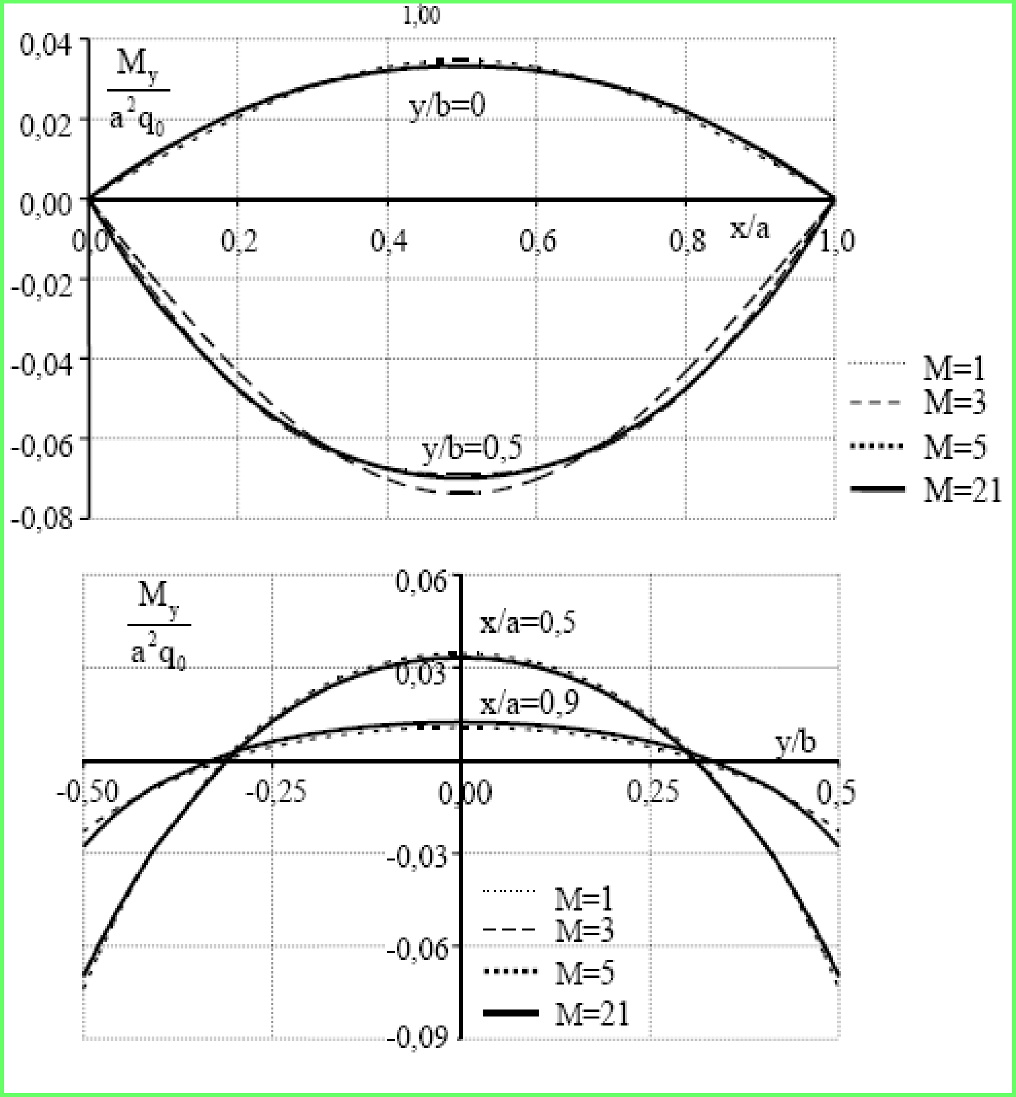
La piastra con due lati appoggiati e due incastrati (a=b)



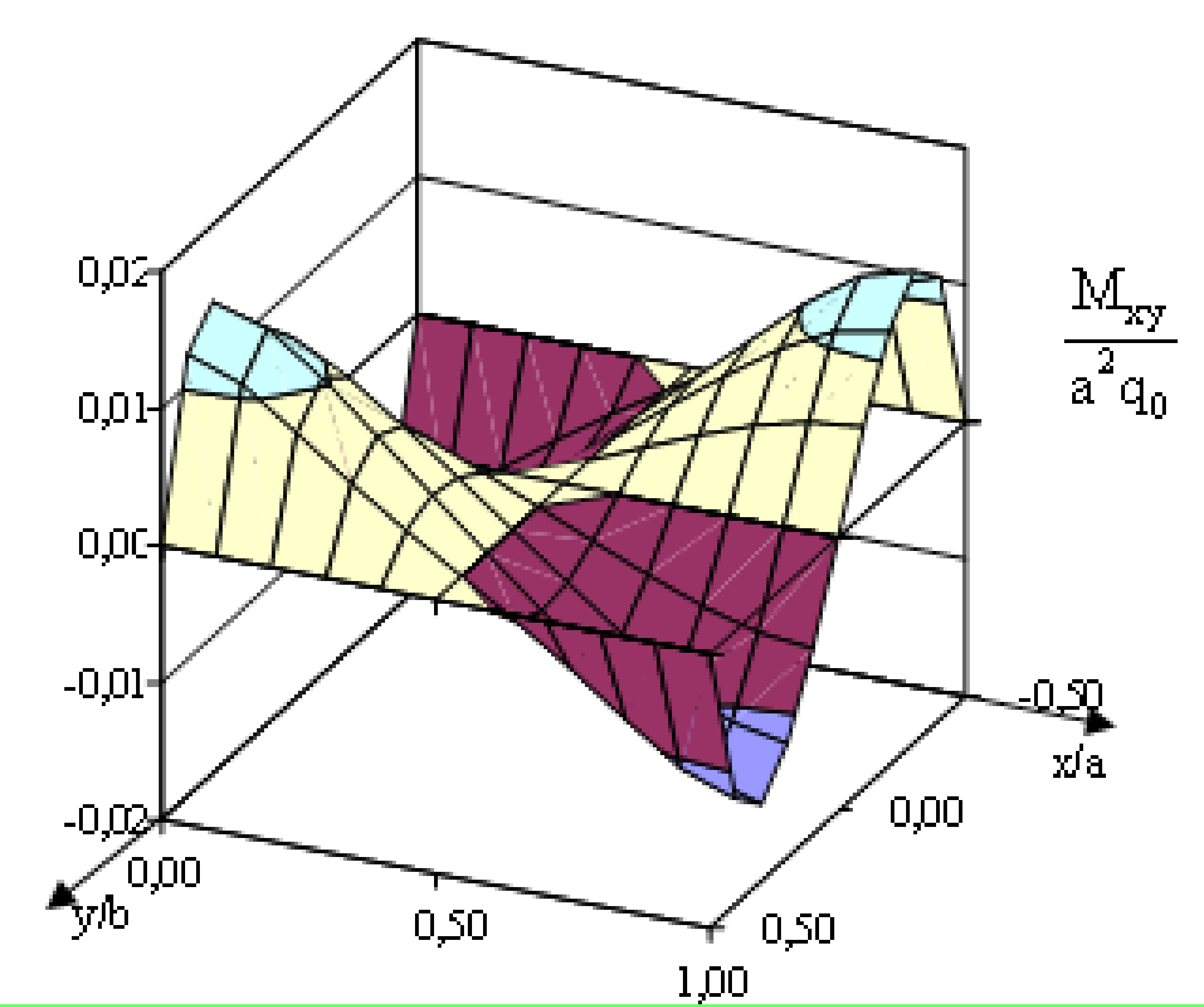
La piastra con due lati appoggiati e due incastrati (a=b)



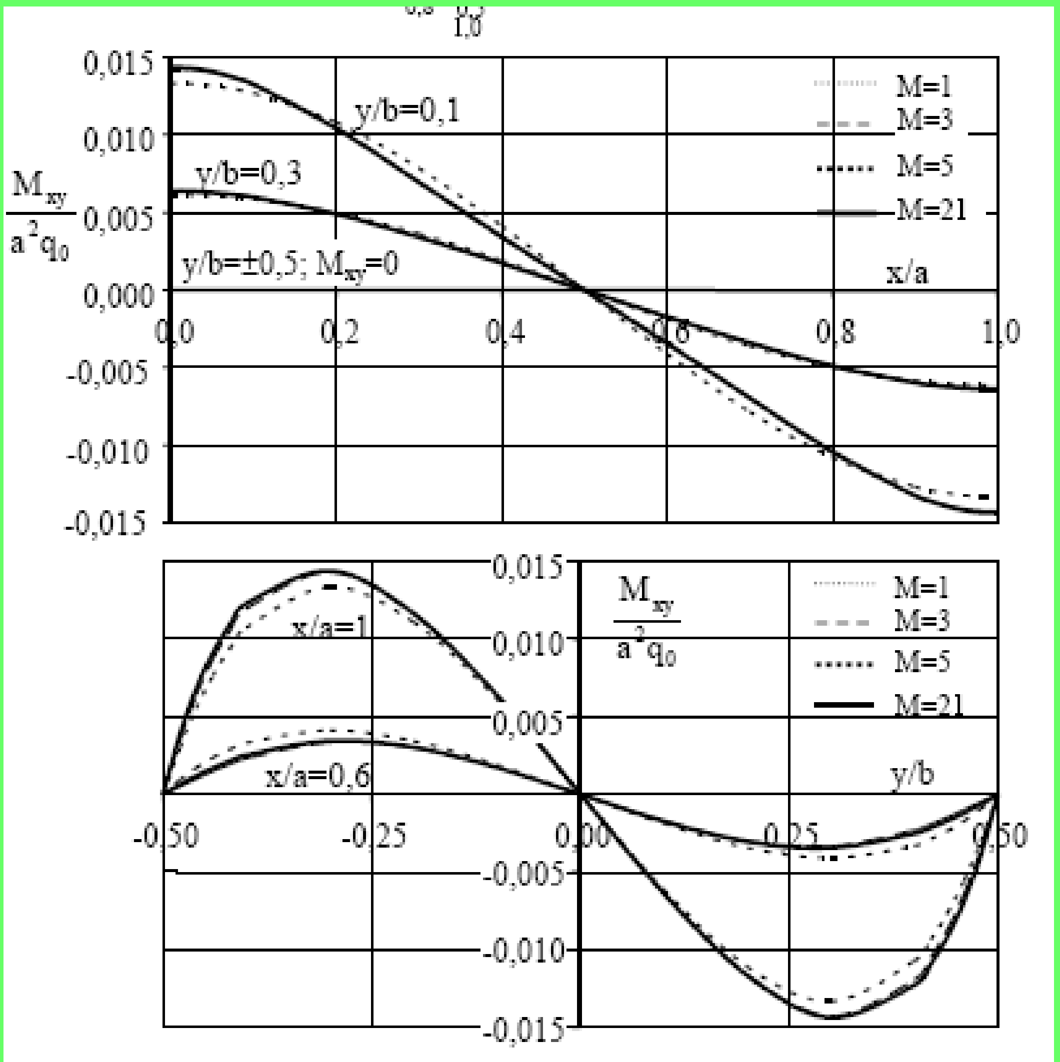
La piastra con due lati appoggiati e due incastrati (a=b)



La piastra con due lati appoggiati e due incastrati (a=b)



La piastra con due lati appoggiati e due incastrati (a=b)



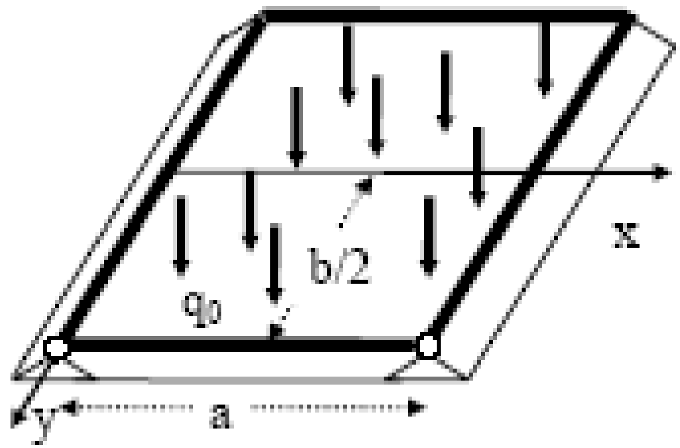
Si noti che ai quattro spigoli risulta M_{xy}=0.

Piastra AAAA rendendo omogenea l'equaz. nel campo

Si calcoli spostamento w, momenti M_x, M_y, M_{xy}, tagli T_x, T_y, tagli effettivi V_x, V_y e forze R_{ij} concentrate agli spigoli di una piastra di lati a,b appoggiata al contorno e soggetta ad un carico q_0 costante.

Si cerchi la soluzione come $w=w_P+w_G$ con:

- w_P integrale particolare dell'equazione nel campo non omogenea;
- w_G integrale generale della equazione nel campo omogenea; in particolare la w_G deve essere ottenuta nella forma:



$$\text{(a)} \qquad w_G(x,y) = \sum_{m=1,2}^{M} Y_m(y)\,\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$$

dove Y_m è la soluzione esatta del sistema di equazioni differenziali in y.

Piastra AAAA rendendo omogenea l'equaz. nel campo

Per piastra soggetta ad un carico costante q_0, all'equazione nel campo:

(1) $$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_0}{D} \Rightarrow \nabla^4 w = \frac{q_0}{D}$$

vanno associate le condizioni al contorno di semplice appoggio:

(2) $$w_{x=0,a} = 0$$

(3) $$M_{x=0,a} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0,a} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0,a} = 0$$

(4) $$w_{y=\pm b/2} = 0$$

(5) $$M_{y=\pm b/2} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=\pm b/2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=\pm b/2} = 0$$

La soluzione della (1) nella forma:

(6) $$w = w_p + w_G$$

dove, come richiesto dal problema, la w_P è un integrale particolare della (1) che può essere scelto arbitrariamente; il modo più semplice per trovarlo è quello di una funzione che dipende solo da x, per cui:

(7) $$\frac{\partial^4 w_p}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 w_p}{\partial y^4} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^4 w_p}{\partial x^4} = \frac{q_0}{D} \Rightarrow w_p = \frac{q_0}{24D} x^4$$

Piastra AAAA rendendo omogenea l'equaz. nel campo

Con tale scelta la (1), in termini di w_G, diviene omogenea:

$$\frac{\partial^4 w_G}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_G}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_G}{\partial y^4} = 0 \tag{8}$$

alla quale vanno associate le c.c. corrispondenti alle (2÷5), in particolare:

$$\begin{aligned} &(w_p + w_G)_{x=0} = 0 \;\Rightarrow\; (w_G)_{x=0} = 0 \\ &(w_p + w_G)_{x=a} = 0 \;\Rightarrow\; (w_G)_{x=a} = -\frac{q_0 a^4}{24D} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &(w_p'' + w_G'')_{x=0} = 0 \;\Rightarrow\; (w_G'')_{x=0} = 0 \\ &(w_p'' + w_G'')_{x=a} = 0 \;\Rightarrow\; (w_G'')_{x=a} = -\frac{q_0}{2D} a^2 \end{aligned} \tag{10}$$

Per consentire lo sviluppo in serie in direzione x del tipo (a) occorre che le condizioni (9,10) siano tutte omogenee; a tal fine si assume:

$$w_G = w_0 + W_G \tag{11}$$

con w_0 tale che:

$$\begin{aligned} &(w_0)_{x=0} = 0 \;;\; (w_0)_{x=a} = -\frac{q_0 a^4}{24D} \\ &(w_0'')_{x=0} = 0 \;;\; (w_0'')_{x=a} = -\frac{q_0}{2D} a^2 \end{aligned} \tag{12}$$

Piastra AAAA rendendo omogenea l'equaz. nel campo

Dovendo soddisfare le quattro condizioni (12), la w_0 può essere assunta nella forma:

(13) $$w_0 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

dove le quattro costanti c_n si calcolano in modo da soddisfare le (12):

(14)
$$w_0(0) = c_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_0 = 0$$
$$w_0''(0) = 2c_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = 0$$
$$w_0''(a) = 6c_3 a = -\frac{q_0}{2D}a^2 \qquad \Rightarrow \qquad c_3 = -\frac{2q_0 a}{24D}$$
$$w_0(a) = c_1 a + c_3 a^3 = -\frac{q_0 a^4}{24D} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \frac{q_0 a^3}{24D}$$
$$w_0 = \frac{q_0 a^3}{24D}x - \frac{2q_0 a}{24D}x^3 = \frac{q_0 a^4}{24D}\left[\frac{x}{a} - 2\left(\frac{x}{a}\right)^3\right]$$

Piastra AAAA rendendo omogenea l'equaz. nel campo

In definitiva, la (6) ricordando la (11) e ponendo $\xi = x/a$, $\eta = y/b$, si scrive:

$$(15) \qquad w = w_p + w_0 + W_G(\eta,\xi) = \frac{q_0 a^4}{24D}(\xi^4 - 2\xi^3 + \xi) + W_G(\eta,\xi)$$

dove l'incognita W_G deve soddisfare il sistema:

$$(16) \qquad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \Rightarrow \frac{b^4}{a^4}\frac{\partial^4 W_G}{\partial \xi^4} + 2\frac{b^4}{a^2 b^2}\frac{\partial^4 W_G}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 W_G}{\partial \eta^4} = 0$$

$$(17) \qquad (W_G)_{\substack{\xi=0\\ \xi=1}} = 0 \qquad ; \qquad \left(\frac{\partial^2 W_G}{\partial \xi^2}\right)_{\substack{\xi=0\\ \xi=1}} = 0$$

$$(18) \qquad (w_p + w_0 + W_G)_{\eta=\pm 0,5} = 0 \; ; \quad \left(\frac{\partial^2 W_G}{\partial \eta^2}\right)_{\eta=\pm 0,5} = 0$$

Piastra AAAA rendendo omogenea l'equaz. nel campo

L'integrale della (16), che soddisfa le (17), può essere cercato come:

$$W_G(\xi,\eta)=\sum_{m=1,2}^{M} Y_m(\eta)\,\mathrm{sen}(m\pi\xi) \tag{24}$$

dove le Y_m, ponendo:

$$\rho=\frac{a}{b}\quad;\quad\lambda_m=\frac{m\pi}{\rho} \tag{25}$$

devono soddisfare la (16), ovvero indicando con i numeri romani la derivazione rispetto ad η:

$$\sum_{m=1,2}^{M}[\lambda_m^4 Y_m-2\lambda_m^2 Y_m^{II}+Y_m^{IV}]\,\mathrm{sen}(m\pi\xi)=0 \tag{26}$$

che è soddisfatta per qualsiasi valore di ξ se:

$$Y_m^{IV}-2\lambda_m^2 Y_m^{II}+\lambda_m^4 Y_m=0\qquad m=1,2,\ldots \tag{27}$$

il cui integrale generale risulta:

$$Y_m(\eta)=A_m\mathrm{Ch}(\lambda_m\eta)+B_m\eta\mathrm{Sh}(\lambda_m\eta)+C_m\mathrm{Sh}(\lambda_m\eta)+D_m\eta\mathrm{Ch}(\lambda_m\eta) \tag{28}$$

dove A_m, B_m, C_m, D_m sono costanti che si determinano imponendo le (18).

Piastra AAAA rendendo omogenea l'equaz. nel campo

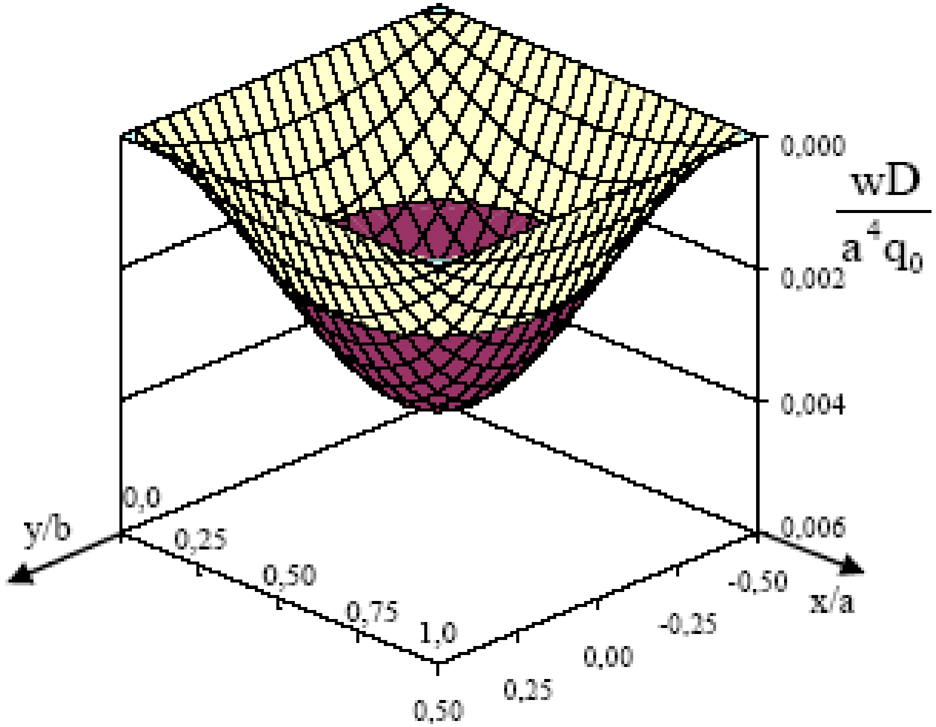
$$(37)\quad w^{*}=\frac{wD}{q_{0}a^{4}}=\frac{(\xi^{4}-2\xi^{3}+\xi)}{24}+\sum_{m=1,3,5..}^{M} Y_{m}^{*}\,\mathrm{sen}(m\pi\xi)$$

$$(39)\quad w^{*}=\frac{wD}{q_{0}a^{4}}=\sum_{m=1,3,5}^{M}\left(\frac{4}{m^{5}\pi^{5}}+Y_{m}^{*}\right)\mathrm{sen}(m\pi\xi)$$

$$Y_{m}^{*}=A_{m}^{*}\mathrm{Ch}(\lambda_{m}\eta)+B_{m}^{*}\eta\,\mathrm{Sh}(\lambda_{m}\eta)$$

Piastra AAAA rendendo omogenea l’equaz. nel campo

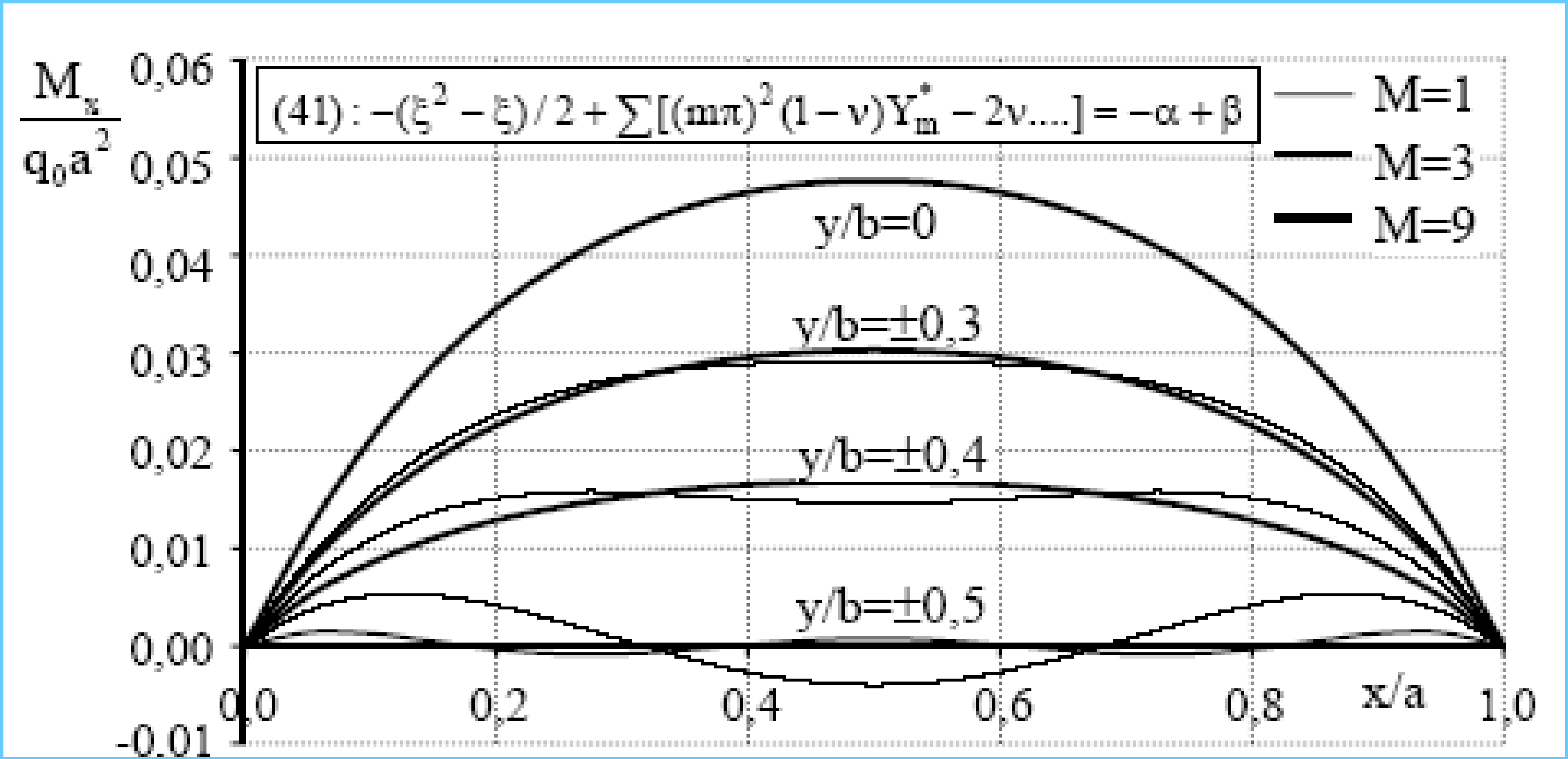
Per il calcolo dello spostamento le (37,39) danno in pratica lo stesso risultato ed è sufficiente un solo termine per avere una ottima approssimazione; il grafico seguente riporta il valore dello spostamento adimensionale nel caso di piastra quadrata (a=b).



Piastra AAAA rendendo omogenea l'equaz. nel campo

– utilizzando la (37), si ha:

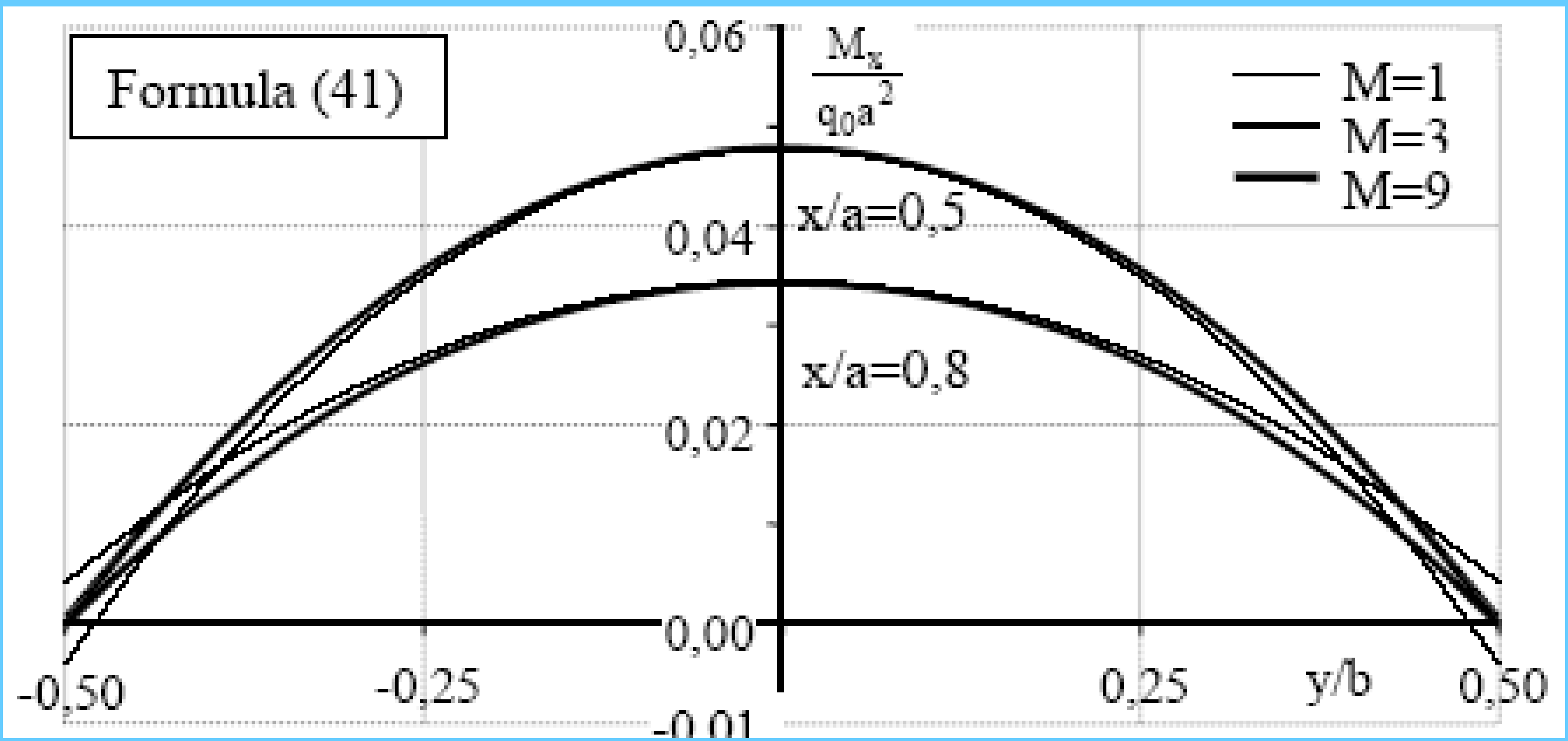
$$(41)\ \frac{M_x}{q_0 a^2} = -\frac{\xi^2-\xi}{2} + \sum_{m=1,3..}^{M}\left[(m\pi)^2(1-\nu)Y_m^* - 2\nu\rho^2\lambda_m B_m^* Ch(\lambda_m\eta)\right]s_m$$



Piastra AAAA rendendo omogenea l'equaz. nel campo

– utilizzando la (37), si ha:

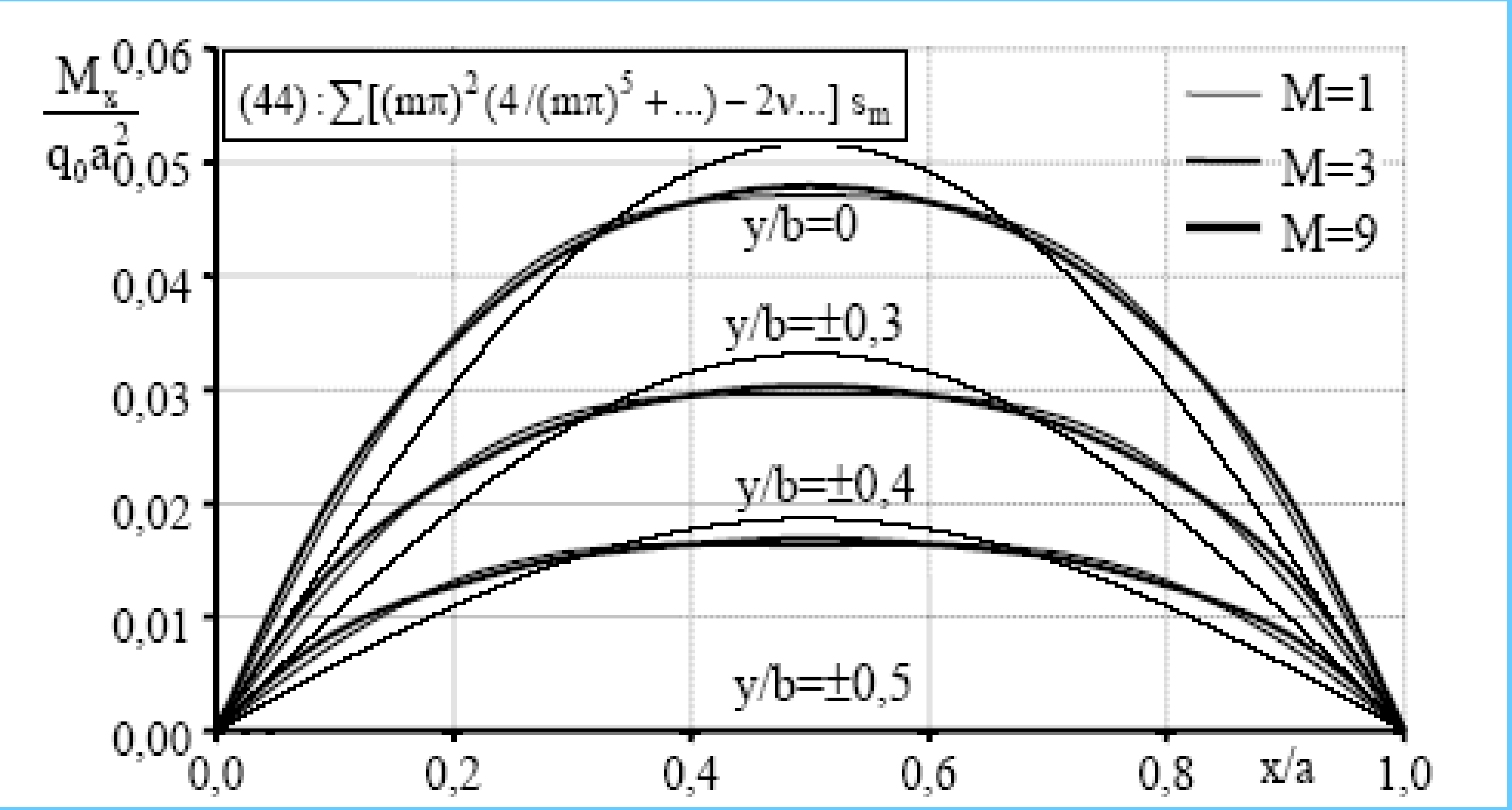
$$(41)\ \frac{M_x}{q_0 a^2} = -\frac{\xi^2 - \xi}{2} + \sum_{m=1,3..}^{M} \left[(m\pi)^2 (1-\nu) Y_m^* - 2\nu\rho^2 \lambda_m B_m^* Ch(\lambda_m \eta) \right] s_m$$



Piastra AAAA rendendo omogenea l'equaz. nel campo

– utilizzando la (39), per il momento M_{xy} vale ancora la (43) mentre:

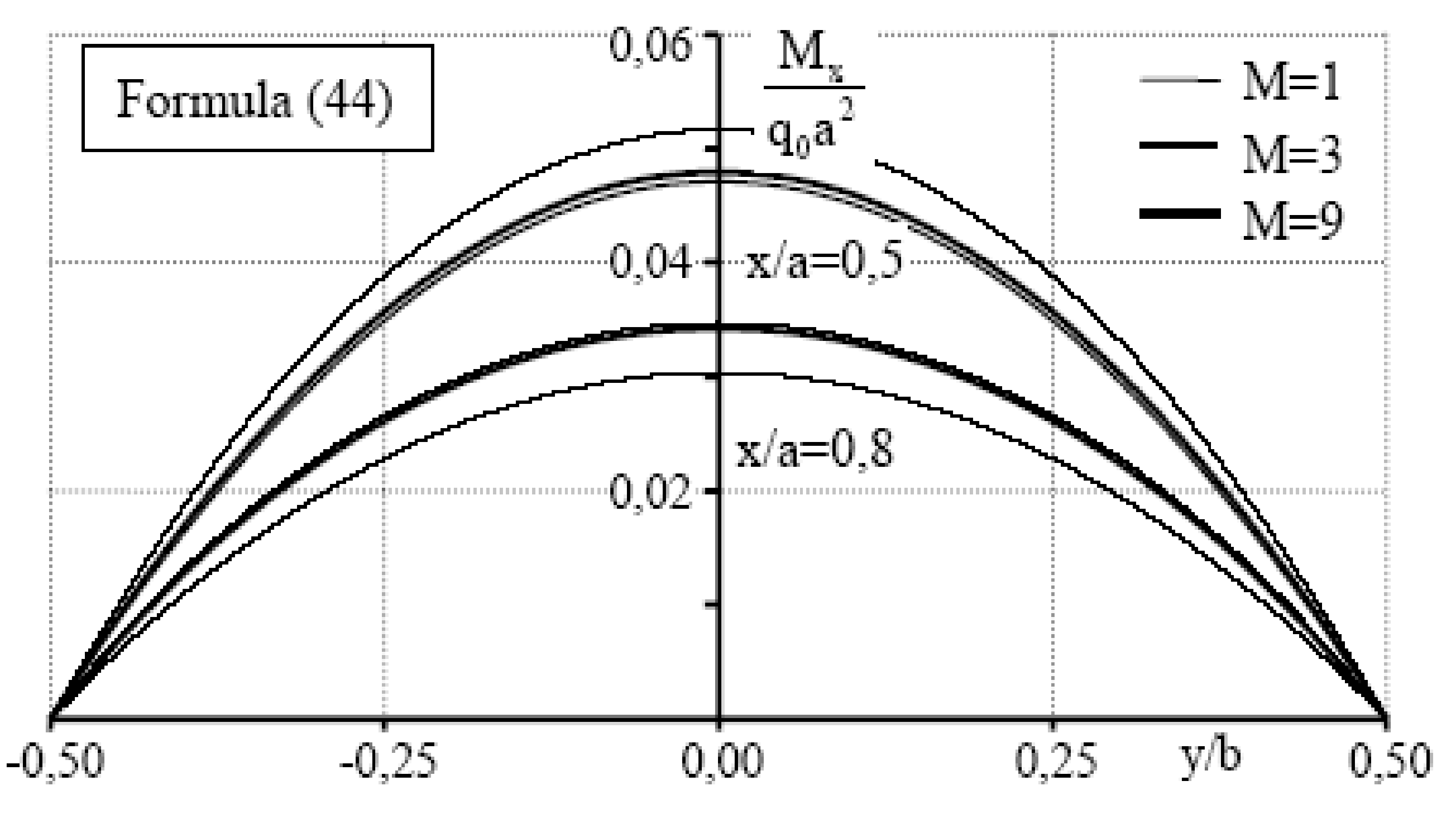
$$(44)\quad \frac{M_x}{q_0 a^2} = \sum_{m=1,3...}^{M} \left[(m\pi)^2 [\frac{4}{m^5\pi^5} + (1-\nu) Y_m^*] - 2\nu\rho^2 \lambda_m B_m^* \mathrm{Ch}(\lambda_m \eta) \right] \mathrm{sen}(m\pi\xi)$$



Piastra AAAA rendendo omogenea l'equaz. nel campo

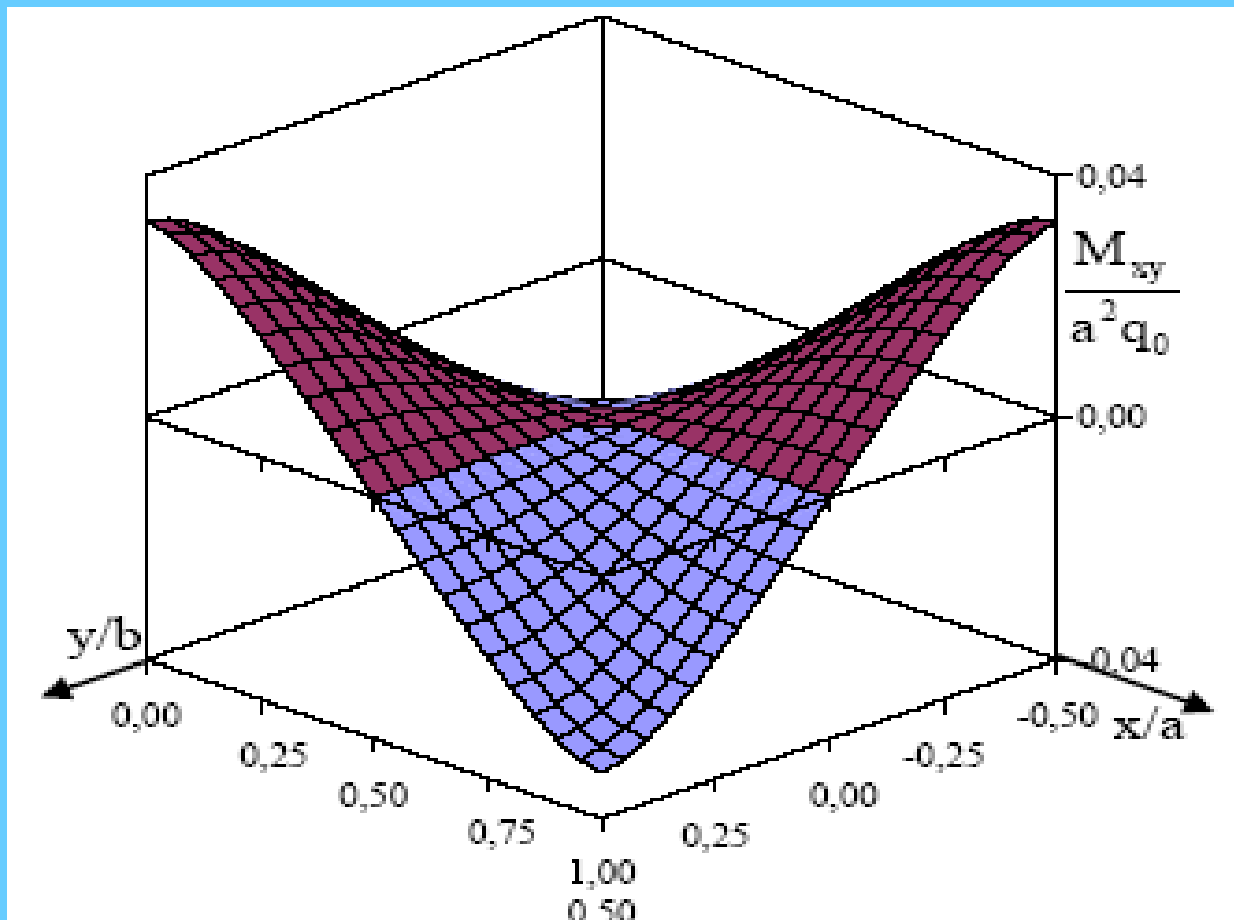
– utilizzando la (39), per il momento M_{xy} vale ancora la (43) mentre:

$$(44)\quad \frac{M_x}{q_0 a^2} = \sum_{m=1,3\ldots}^{M} \left[(m\pi)^2 [\frac{4}{m^5\pi^5} + (1-\nu)Y_m^*] - 2\nu\rho^2\lambda_m B_m^* Ch(\lambda_m \eta) \right] sen(m\pi\xi)$$



Piastra AAAA rendendo omogenea l’equaz. nel campo

$$(43)\ \frac{M_{xy}}{q_0 a^2} = (\nu - 1)\sum_{m=1}^{M}\left\{(m\pi)^2\left[A_m^* \mathrm{Sh}(\lambda_m \eta) + B_m^* \eta \mathrm{Ch}(\lambda_m \eta)\right] + \rho^2 B_m^* \lambda_m \mathrm{Sh}(\lambda_m \eta)\right\} c_m$$



Piastra AAAA rendendo omogenea l'equaz. nel campo