

Costruzioni Aerospaziali

richiami di Scienza delle Costruzioni

Impostazione del problema elastico

Risolvere un problema di elasticità comporta la determinazione di complessive 15 incognite:

- a) tre incognite del vettore spostamento $\{S\}$;
- b) sei incognite del tensore delle deformazioni $[E]$;
- c) sei incognite del tensore degli sforzi $[\Sigma]$.

Si hanno a disposizione le 15 relazioni:

- 1) le sei relazioni cinematiche ;
- 2) le tre equazioni di equilibrio alla traslazione *con relative condizioni al contorno* ;
- 3) le sei relazioni costitutive .

Nessun gruppo delle relazioni 1), 2), 3) è tale da contenere singolarmente un numero di incognite pari al numero di relazioni, per cui a prima vista si ha un sistema accoppiato di 15 equazioni in 15 incognite.

Per semplificare il problema si può tentare di isolare un certo numero di equazioni in un pari numero di incognite.

Risolto questo primo gruppo di equazioni, si passa a risolvere un altro gruppo di equazioni in un pari numero di incognite e così via. Possiamo sinteticamente indicare questo modo di procedere come ***risolvere per risalita*** il sistema iniziale.

A)–Metodo degli spostamenti

A)–Metodo degli spostamenti, è quello nel quale sono gli spostamenti le prime incognite del processo di risalita.

Delle relazioni a disposizione il gruppo meno numeroso è quello delle tre equazioni di equilibrio che però è nelle sei incognite componenti del tensore degli sforzi. Esprimendo queste ultime componenti, **prima in termini di deformazioni** (attraverso i legami costitutivi) e poi in termini di spostamenti (attraverso le relazioni cinematiche), è possibile scrivere le tre equazioni di equilibrio e relative condizioni al contorno in termini delle tre componenti di spostamento.

Una volta determinati gli spostamenti è possibile per risalita, attraverso le relazioni cinematiche e costitutive, ricavare tutte le quindici incognite.

B)–Il metodo degli sforzi

B)–Il metodo degli sforzi, è quello nel quale sono gli sforzi le prime incognite del processo di risalita.

Si utilizzano ancora le tre equazioni di equilibrio, che sono però insufficienti per trovare le sei componenti univoche degli sforzi.

Dal punto di vista teorico si potrebbero assumere arbitrariamente tre componenti degli sforzi e ricavare le tre rimanenti componenti dalle equazioni di equilibrio.

Noti gli sforzi, dai legami costitutivi si hanno le deformazioni ma, al momento di ricavare gli spostamenti non c'è garanzia circa la loro continuità ed unicità. Garanzia che si può avere se gli sforzi, oltre che soddisfare l'equilibrio, garantiscono i necessari requisiti sulle deformazioni. **Questo può essere fatto ricorrendo alle equazioni di compatibilità.**

Unicità della soluzione

Tipologia di problemi

1)–Determinare sforzi e deformazioni quando sono note:

–le forze corpo b_x, b_y, b_z ;

–le forze di superficie f_x^*, f_y^*, f_z^* su tutto il contorno S .

Metodo degli sforzi: equ. di equilibrio con le c.c. + equ. di compatibilità.

2)– Determinare sforzi e deformazioni quando sono note:

–le forze corpo b_x, b_y, b_z ;

–gli spostamenti u^*, v^*, w^* su tutto il contorno S .

Metodo degli spostamenti: equ. di equilibrio con le c.c..

3)– Determinare sforzi e deformazioni quando sono note:

–le forze corpo b_x, b_y, b_z ;

–le forze di superficie f_x^*, f_y^*, f_z^* sulla parte di contorno S_1 ;

–gli spostamenti u^*, v^*, w^* sulla parte del contorno S_2 .

Per tutti tali problemi di condizioni al contorno si dimostra, in campo lineare,

l'esistenza e l'unicità del tensore degli sforzi e delle deformazioni.

Per i due ultimi problemi, gli **spostamenti sono determinati univocamente** dal momento che sono assegnati almeno su una parte del contorno.

Il metodo inverso e semi-inverso

A)-Metodo inverso: si scelgono le funzioni incognite con l'unico requisito di soddisfare le equazioni differenziali nel campo; si trovano poi le forze e/o gli spostamenti da assegnare al contorno perché anche queste risultino soddisfatte.

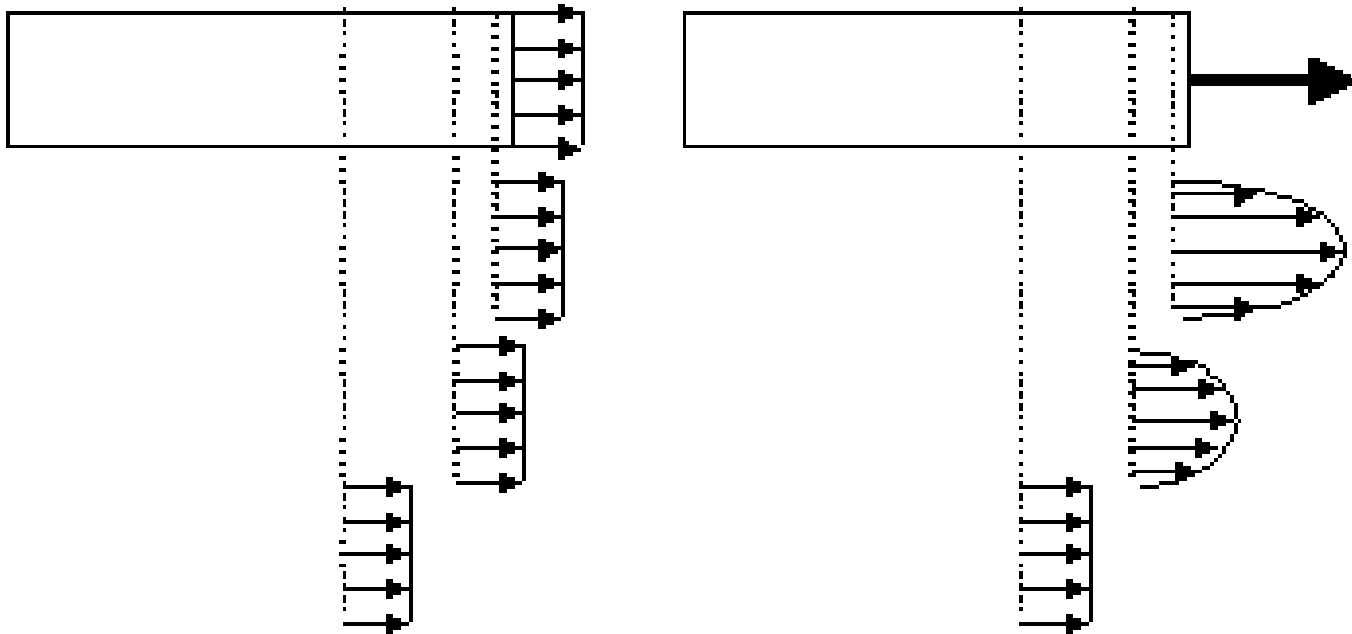
In altri termini si sceglie la soluzione e si trova il problema che la soddisfa.

B)-Metodo semi-inverso: l'esperienza ed i risultati del metodo inverso consentono di intuire il campo di spostamenti e/o di sforzi del problema. Su tale base si esprimono spostamenti e/o sforzi in termini di funzioni e/o coefficienti incogniti che vengono poi trovati in modo da soddisfare tutte le condizioni del problema.

Principio di Saint–Venant

Se su una superficie dove agisce una distribuzione di forze viene applicata una diversa distribuzione di forze, gli effetti delle due distinte distribuzioni sono essenzialmente gli stessi se:

- si considerano regioni del corpo sufficientemente distanti dalla regione in cui si è effettuata la sostituzione;
- le due distribuzioni di forze risultano staticamente equivalenti (in termini di forza risultante e momento risultante)



Stati Bidimensionali

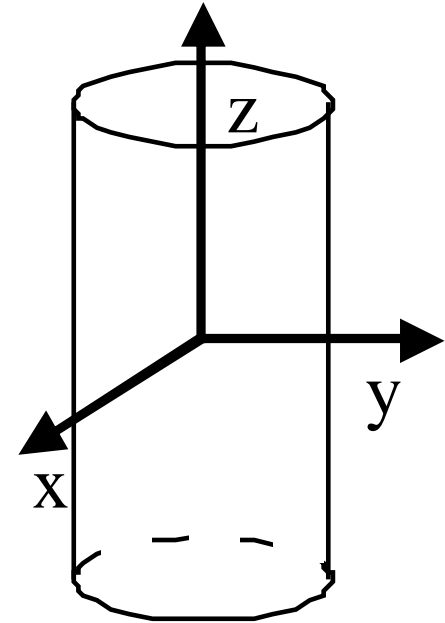
- A)-Deformazione piana
- B)-Sollecitazione piana

Stati bidimensionali

A)-Deformazione piana.

Se risulta nulla (o costante) la componente di spostamento in una direzione.

In particolare si consideri il cilindro di figura di generatrici parallele all'asse z con le facce estreme piane e parallele al piano xy .



Si assume:

- sulla superficie cilindrica sono applicate delle forze di superficie \mathbf{T} indipendenti da z con componenti solo nel piano xy ;
- eventuali forze di volume \mathbf{B} sono anche loro indipendenti dalla z con componenti solo nel piano xy .

$$\mathbf{u} = u(x, y) \quad ; \quad \mathbf{v} = v(x, y) \quad ; \quad \mathbf{w} = 0$$

segue-Deformazione piana.

Relazioni cinematiche:

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad ; \quad \gamma_{xz} = 0 \quad ; \quad \gamma_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Equazioni di equilibrio:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad + \text{c.c.}$$

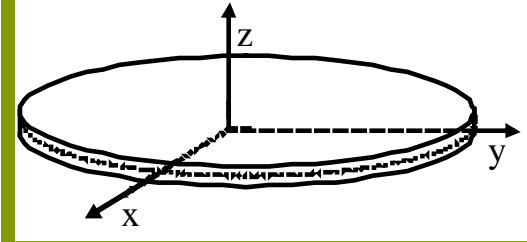
Legami costitutivi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} \right] \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx} \right] \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{array} \right.$$

B)-Sollecitazione piana

Se risultano nulle le componenti di sforzo in una direzione.

In particolare si consideri il corpo di figura, ottenuto come sezione di un cilindro retto con due piani $z=\pm h/2$.



Si assume:

- spessore h piccolo rispetto alle dimensioni nel piano xy ;
- sulle facce non vi sono applicate delle forze;
- sul bordo sono applicate solo forze di superficie \mathbf{T} con componenti solo nel piano xy indipendenti da z ;
- le forze di volume sono solo in direzione x,y indipendenti da z .

$$\sigma_{zz} = 0 \quad ; \quad \tau_{xz} = 0 \quad ; \quad \tau_{yz} = 0$$

segue -Sollecitazione piana

Relazioni cinematiche:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad ; \quad \gamma_{xz} = 0 \quad ; \quad \gamma_{yz} = 0$$

Equazioni di equilibrio:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad + \text{c.c.}$$

Legami costitutivi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} [\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} [\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}] \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{array} \right.$$

M. degli spostamenti: sollecitazione piana

Equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases}$$

Condizioni al contorno $S=S_1+S_2$:

S_1).dove sono date le forze

$$\begin{cases} \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_y = \frac{1+\nu}{E} f_x^* \\ \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) n_y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_x = \frac{1+\nu}{E} f_y^* \end{cases}$$

S_2).dove sono dati gli spostamenti

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad ; \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^*$$

M. degli spostamenti: **deformazione piana**

Equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases}$$

Condizioni al contorno $S=S_1+S_2$:

S_1).dove sono date le forze

$$\begin{cases} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_y = \frac{1+\nu}{E} f_x^* \\ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) n_y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_x = \frac{1+\nu}{E} f_y^* \end{cases}$$

S_2).dove sono dati gli spostamenti

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad ; \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^*$$

M. degli sforzi ($\mathbf{B}=0 \rightarrow \text{soll. p.} \equiv \text{def. p.}$)

Equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Equazione
congruenza:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

Condizioni al contorno
dove sono date le forze

$$\begin{cases} \sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y = f_x^* \\ \sigma_{yy} n_y + \tau_{xy} n_x = f_y^* \end{cases}$$

Funzione sforzo (Airy) Φ

Equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Funzione sforzo Φ

Identicamente
soddisfatte se:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} ; \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} ; \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

Equazione
congruenza:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0$$

Condizioni al contorno
dove sono date le forze

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} n_x - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} n_y = f_x^* \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} n_y - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} n_x = f_y^* \end{cases}$$

Il Metodo Inverso

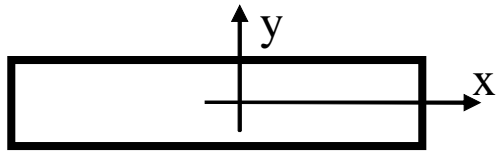
Funzione sforzo Φ ?

$$\nabla^4 \Phi = 0$$

Assenza delle forze b_x e b_y

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} n_x - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} n_y = f_x^* \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} n_y - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} n_x = f_y^* \end{cases}$$

Condizioni al contorno
sulle forze



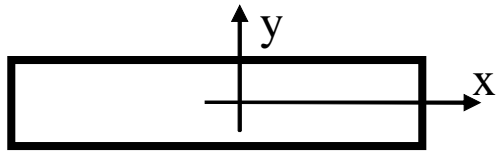
$$\Phi = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} x^m y^n$$

$$\begin{cases} f_x^* = 2[a_{02} + a_{12}x + 3a_{03}y]n_x - [a_{11} + 2a_{21}x + 2a_{12}y]n_y \\ f_y^* = 2[a_{20} + a_{21}y + 3a_{30}x]n_y - [a_{11} + 2a_{21}x + 2a_{12}y]n_x \end{cases}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} ; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

$$\nabla^4 \Phi = 0$$

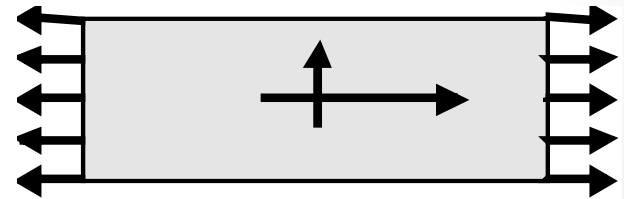
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} n_x - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} n_y = f_x^* \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} n_y - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} n_x = f_y^* \end{cases}$$



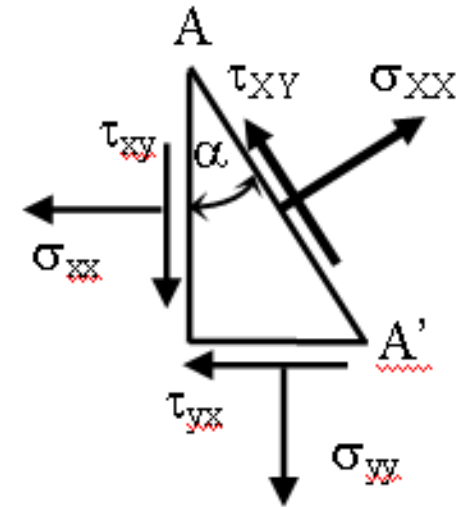
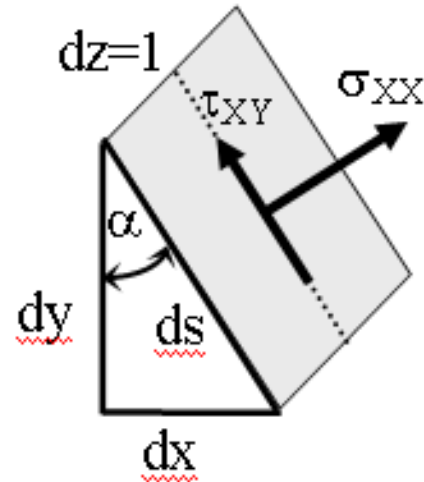
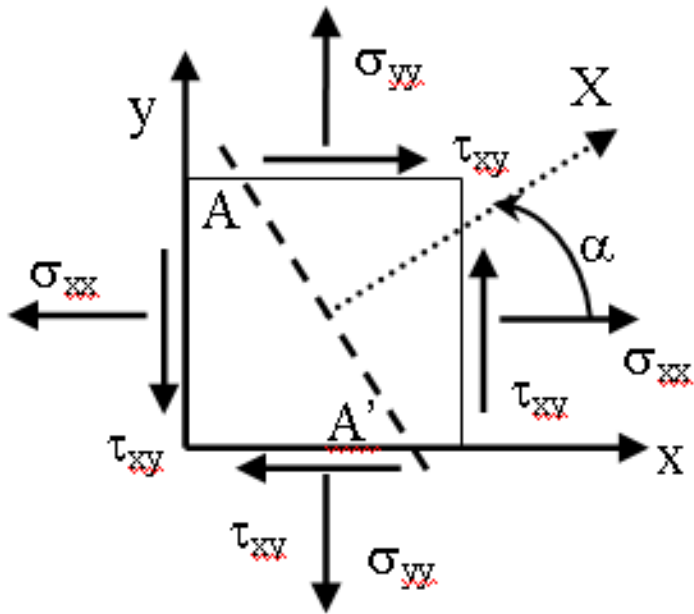
$$\Phi = a_{02} x^0 y^2$$

$$\begin{cases} f_x^* = 2a_{02} \\ f_y^* = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{xx} = 2a_{02} \quad ; \quad \sigma_{yy} = 0 \quad ; \quad \tau_{xy} = 0$$



Sforzi intorno al punto



$$\sigma_{XX} ds = (\sigma_{xx} \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha) dy + (\sigma_{yy} \sin \alpha + \tau_{yx} \cos \alpha) dx$$

$$\tau_{XY} ds = -(\sigma_{xx} \sin \alpha - \tau_{xy} \cos \alpha) dy + (\sigma_{yy} \cos \alpha - \tau_{yx} \sin \alpha) dx$$

$$dx = ds \sin \alpha \quad ; \quad dy = ds \cos \alpha$$

Sforzi intorno al punto

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{XX} \\ \sigma_{YY} \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2 \cos \alpha \sin \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2 \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$



Sforzi principali

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0 \quad \tan 2\alpha_{\sigma} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

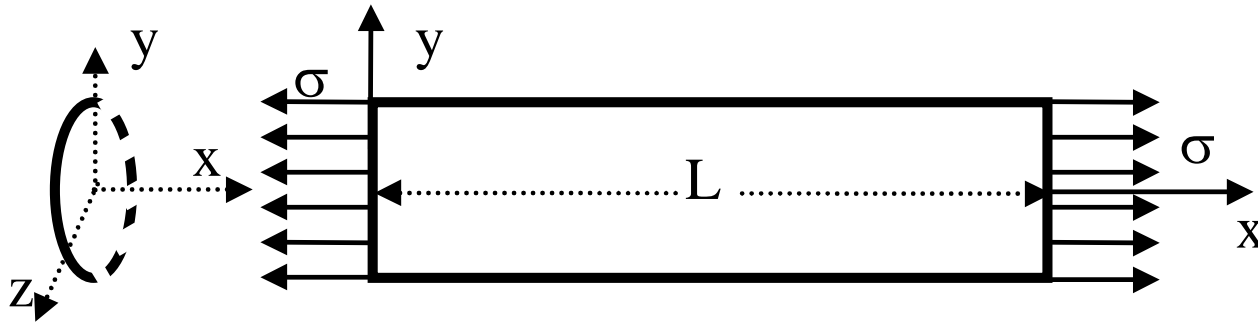
I due angoli α_{σ} e $\alpha_{\sigma} + 90$ definiscono due direzioni e sui piani di cui sono la normale lo sforzo assiale assume il massimo e minimo valore. Questi sforzi sono indicati come principali e i piani su cui agiscono piani principali

$$\frac{d\tau_{XY}}{d\alpha} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \cos 2\alpha - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha = 0 \quad \tan 2\alpha_{\tau} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}}$$

$$\tan 2\alpha_{\sigma} \tan 2\alpha_{\tau} = -1$$

Indica che le direzioni tra sforzo assiale e sforzo di taglio principale e' di 45 deg.

Trazione con il metodo semi-inverso



Con tale sollecitazione esterna, possiamo ipotizzare che:

- sulle sezioni ortogonali all'asse x , il vettore sforzo $\mathbf{T}^{(x)}$ sia *costante* con unica componente non nulla quella assiale σ_x ;
- sulle sezioni con piani ortogonali agli assi y, z i vettori sforzo $\mathbf{T}^{(y)}$, $\mathbf{T}^{(z)}$ siano identicamente nulli.

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifica del campo di sollecitazione

a)–Equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$$

b)–Condizioni al contorno:

b1)– sulle facce d'estremità $x=0,L$

$$\{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{T}^{(\pm x)} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = [\Sigma]\{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} \pm \sigma \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

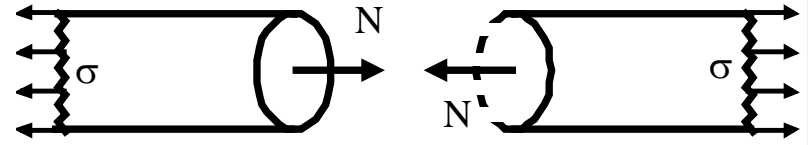
b2)– sul resto del contorno

$$\{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad \mathbf{T}^{(n)} = \begin{Bmatrix} \sigma_{nx} \\ \tau_{ny} \\ \tau_{nz} \end{Bmatrix} = [\Sigma]\{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

c)–Congruenza

Determinazione delle altre incognite

a)–su ciascuna sezione $N = \sigma A$



b)–deformazioni

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma}{E} \quad ; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma}{E}$$
$$\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = \gamma_{xy} = 0$$

Condizioni di congruenza soddisfatte poiché le componenti del tensore delle deformazioni sono costanti

c)–Spostamenti

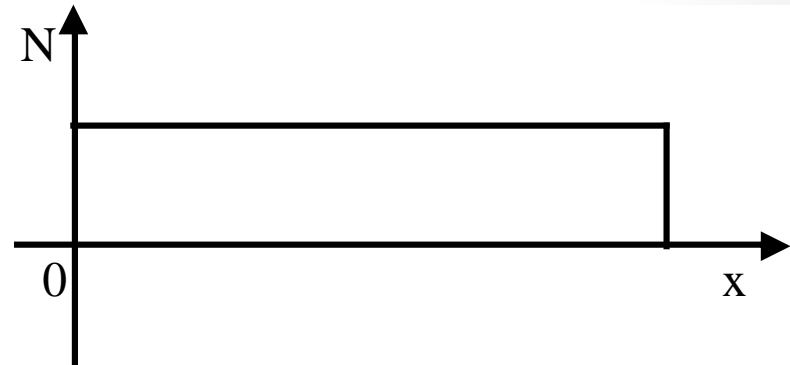
$$u(x) = u(0) + \frac{Nx}{EA}$$

$$v = -\frac{\nu\sigma}{E} y$$

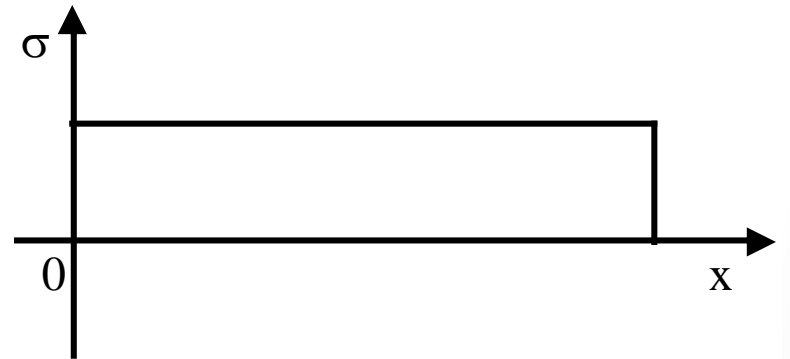
$$w = -\frac{\nu\sigma}{E} z$$

Diagrammi

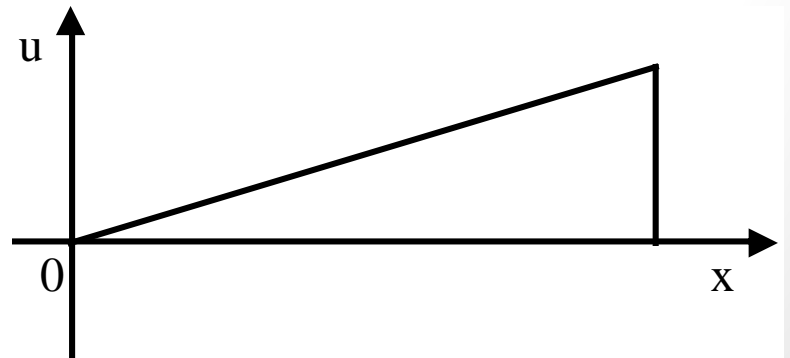
a)–della risultante N



b)–dello sforzo $\sigma=N/A$.



c)–dello spostamento elastico u



La torsione

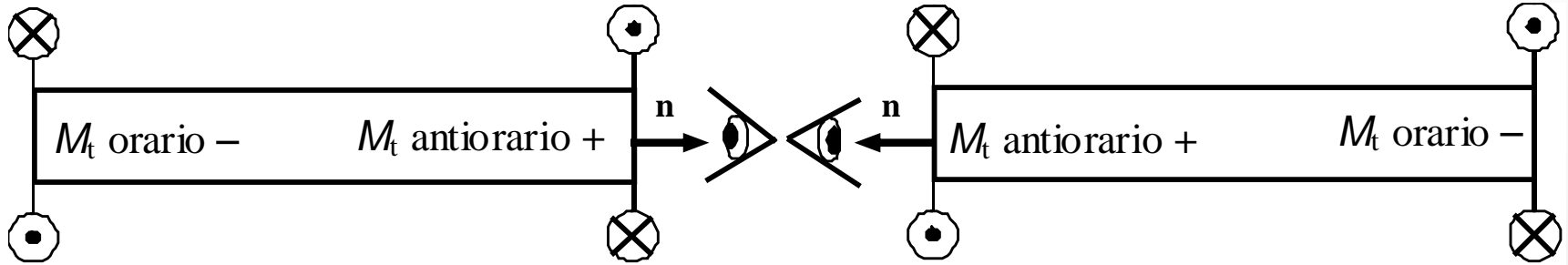
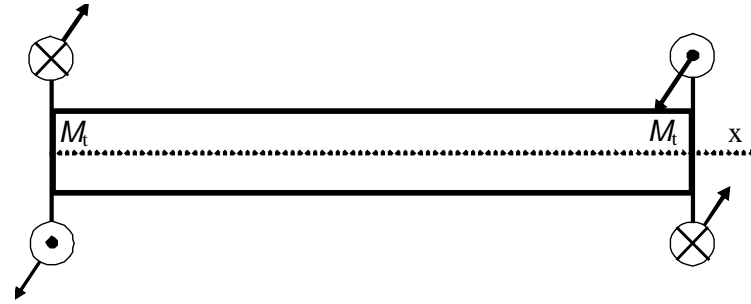
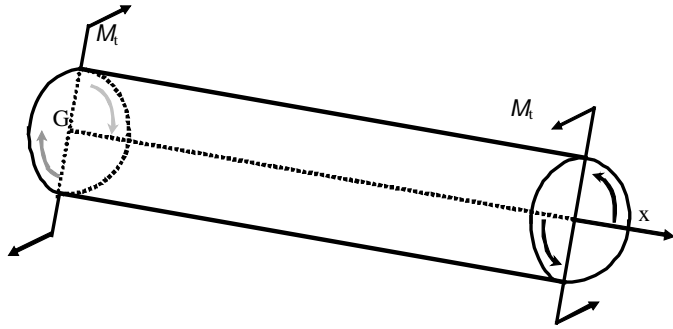
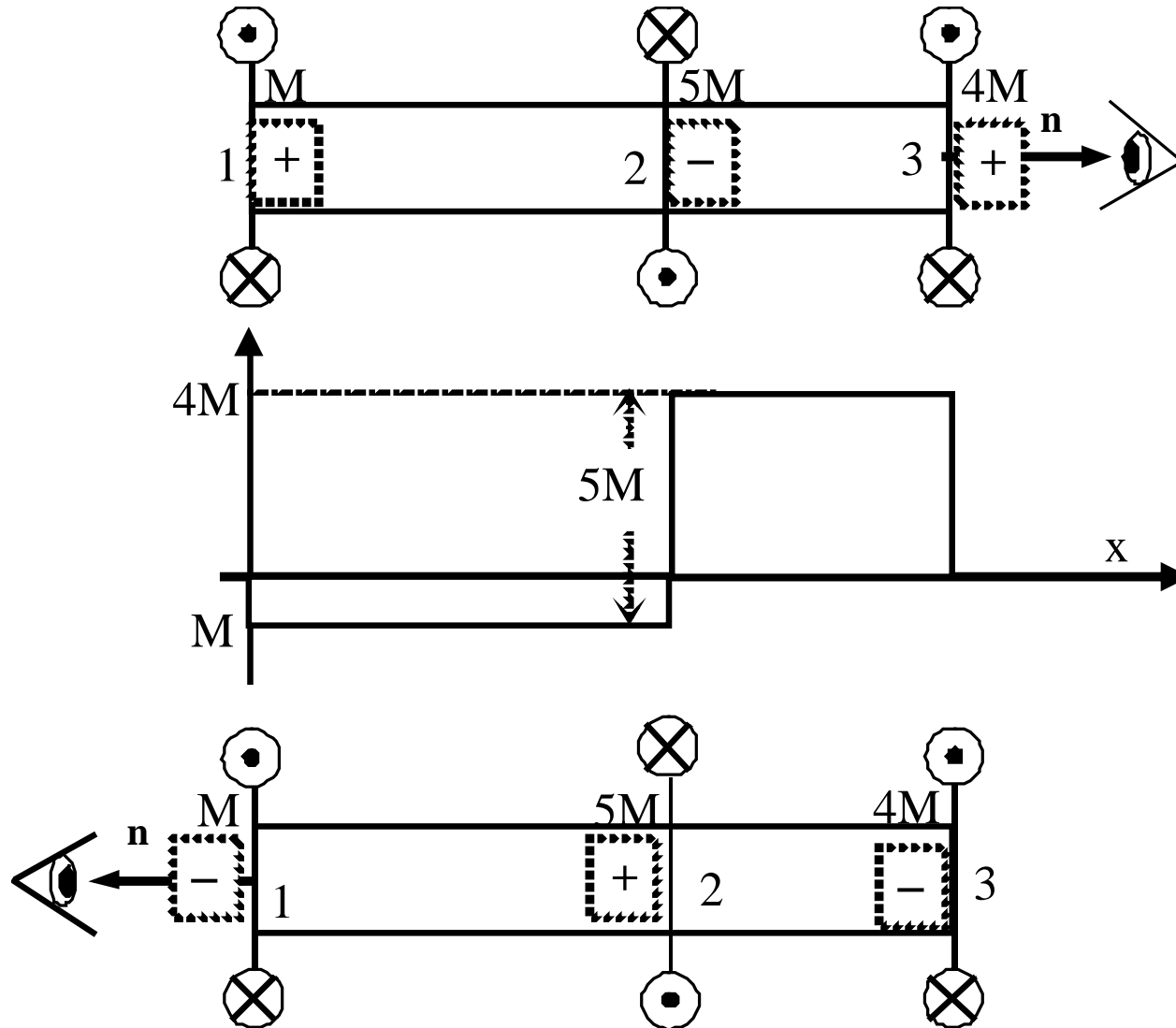
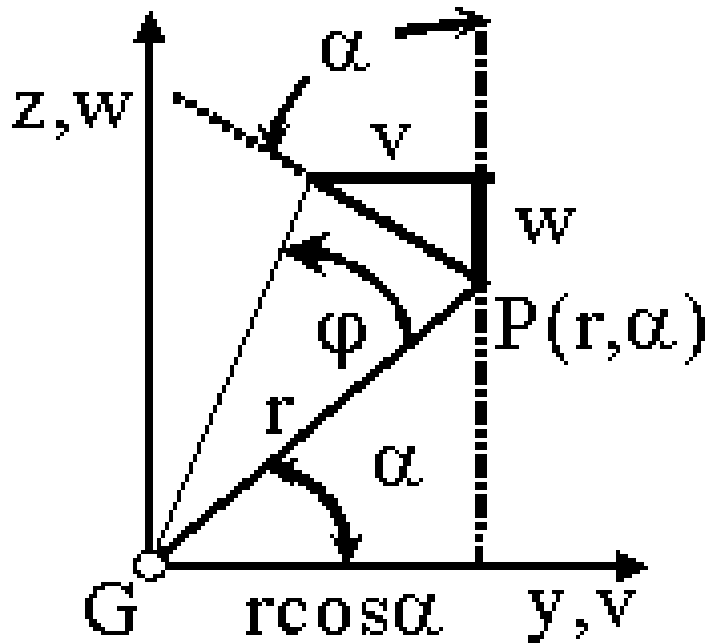
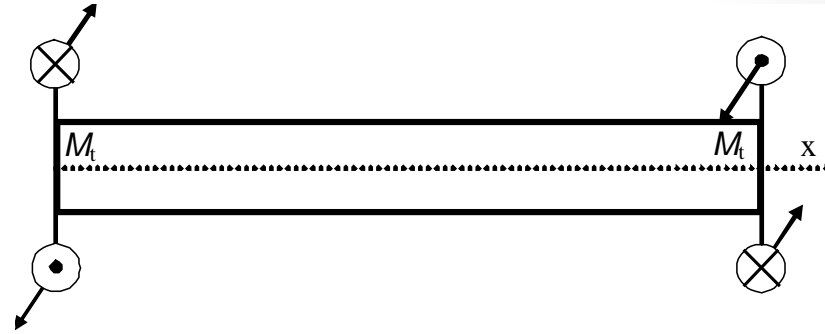
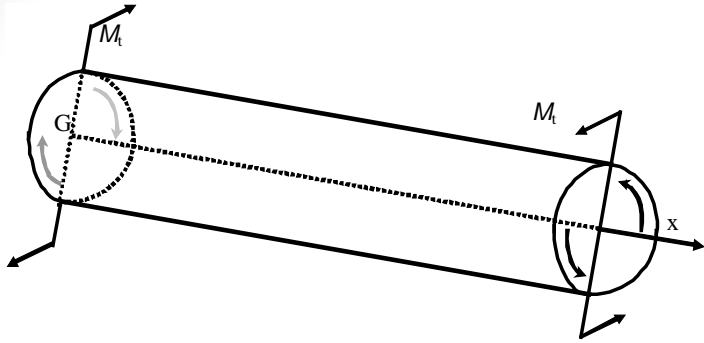


Diagramma dei momenti torcenti



Torsione: Cilindro Circolare



$$\begin{cases} u = 0 \\ v = -\varphi r \sin \alpha = -z\varphi(x) \\ w = \varphi r \cos \alpha = y\varphi(x) \end{cases}$$

Cilindro Circolare

1. Spostamenti (assunti):
con φ incognita.

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = -\varphi r \sin \alpha = -z\varphi(x) \\ w = \varphi r \cos \alpha = y\varphi(x) \end{cases}$$

2. Deformazioni (legami
cinematici)

$$\gamma_{xy}(x, z) = -z \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad ; \quad \gamma_{xz}(x, y) = y \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

3. Sforzi (relazioni
costitutive)

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -Gz \frac{d\varphi}{dx} \quad ; \quad \tau_{xz} = Gy \frac{d\varphi}{dx} \\ \tau_{yz} &= \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \end{aligned}$$

3. Tensore degli Sforzi

$$[\Sigma] = G\varphi' \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Metodo semi inverso

a)–Equazioni di equilibrio

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \equiv 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -Gz \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = Gy \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0 \end{array} \right.$$

La prima è identicamente soddisfatta, mentre dalle rimanenti:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = \text{costante} = \phi$$

Quindi l'equilibrio è soddisfatto se la *rotazione per unità di lunghezza* o *angolo relativo di torsione* ϕ è costante .

A meno di una traslazione rigida: $\varphi = \phi x$.

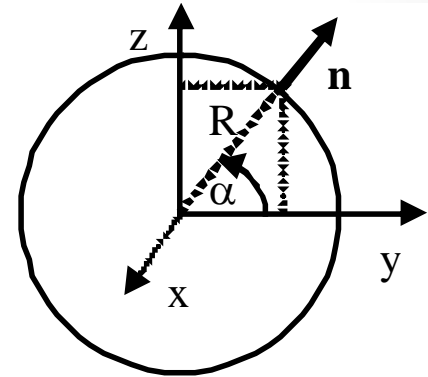
La rotazione ϕ *definisce la deformazione* ovvero è, per la torsione, l'equivalente degli allungamenti relativi del caso della trazione.

b)–Condizioni al contorno:

b1)–sulla superficie cilindrica CIRCOLARE

Ricordiamo che sul contorno cilindrico
non sono applicate forze

$$n_x = 0 ; \quad n_y = \cos \alpha = \frac{y}{R} ; \quad n_z = \sin \alpha = \frac{z}{R}$$

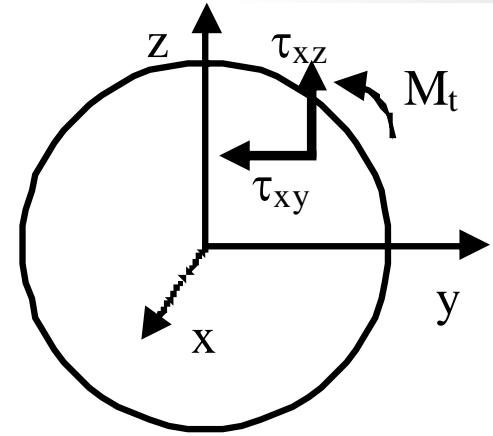


$$\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{G}\varphi' \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{G}\varphi'}{R} \begin{Bmatrix} -yz + zy \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b)–Condizioni al contorno:

b2)– sulle facce d'estremità $x=0,L$

$$\mathbf{T}^{(\pm x)} = G\varphi' \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \pm G\varphi' \begin{Bmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{Bmatrix}$$



Resultanti:

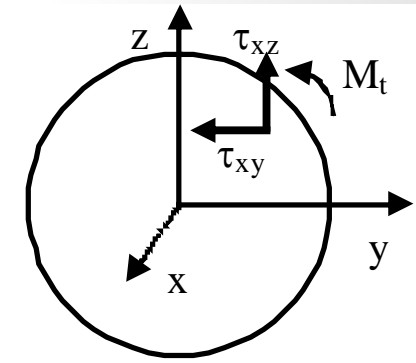
$$\begin{cases} R_x = \int_A \sigma_{xx} dA = 0 & ; & R_y = \int_A \tau_{xy} dA = -G\varphi' \int_A z dA = 0 \\ R_z = \int_A \tau_{xz} dA = G\varphi' \int_A y dA = 0 & ; & M_y = M_z = 0 \\ M_t = \int_A (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dA = G\varphi' \int_A (y^2 + z^2) dA = GI_p \varphi' \end{cases}$$

$$I_p = \pi/2 R^4$$

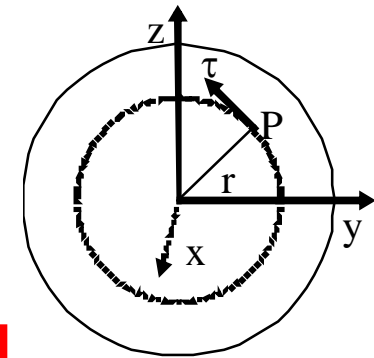
$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{2M_t}{\pi GR^4} \quad \Rightarrow \quad M_t = GI_p \frac{d\varphi}{dx} = B \frac{d\varphi}{dx}$$

Conclusioni

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy}(z) & \tau_{xz}(y) \\ \tau_{xy}(z) & 0 & 0 \\ \tau_{xz}(y) & 0 & 0 \end{bmatrix} = G\theta' \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$M_t = GI_p \frac{d\varphi}{dx} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_p}$$

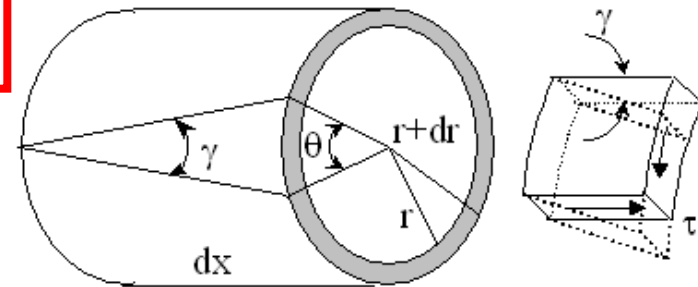


Sforzo di taglio normale al raggio r

$$|\mathbf{T}| = \tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = G\varphi' \sqrt{y^2 + z^2} = G\varphi' r = \frac{M_t r}{I_p}$$

$$ds = \gamma dx = r d\theta \Rightarrow \gamma = \varphi' r$$

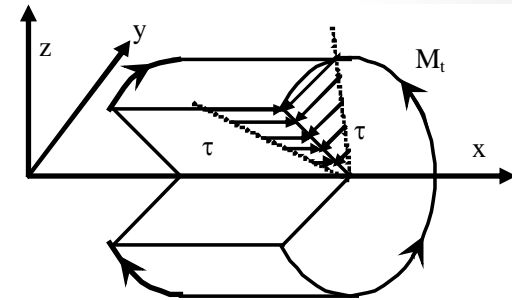
scorrimento



Considerazioni

$$\tau = G\phi' r = \frac{M_t r}{I_p}$$

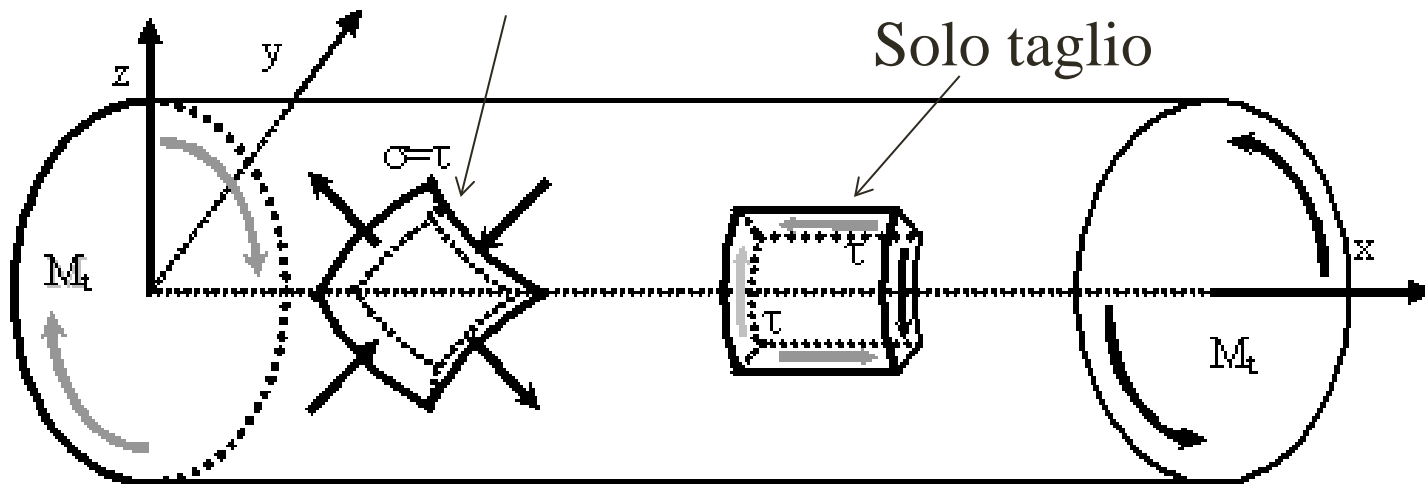
$$\tau_{\text{Max}} = \frac{M_t R}{I_p} = \frac{2M_t R}{\pi R^4} = \frac{2M_t}{\pi R^3} = \frac{M_t}{W_p}$$



W_p modulo di resistenza polare

Solo sforzo normale

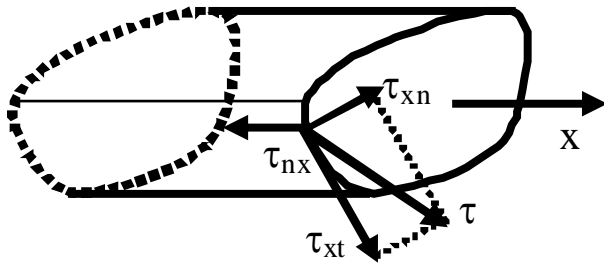
Solo taglio



Torsione: Cilindro NON Circolare

$$\begin{cases} n_x = 0 \\ n_y \neq y/R \\ n_z \neq z/R \end{cases}$$

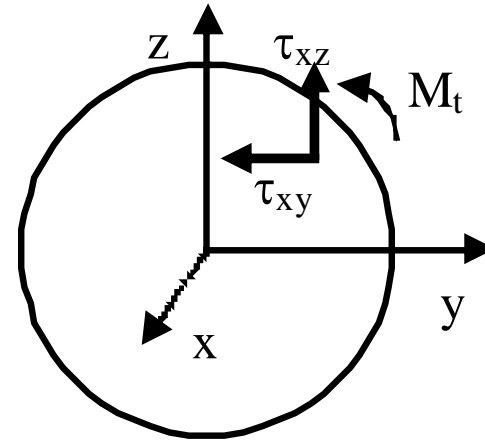
$$\mathbf{T}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Taglio non più tangente

Cilindro circolare

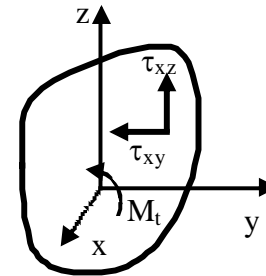
$$\begin{cases} \mathbf{u} = 0 \\ v = -z\varphi(\mathbf{x}) \\ w = y\varphi(\mathbf{x}) \end{cases}$$



Cilindro NON circolare

Bisogna rimuovere ipotesi $u=0$

$$\begin{cases} \mathbf{u} = C\Psi(y, z) \\ v = -z\varphi(\mathbf{x}) \\ w = y\varphi(\mathbf{x}) \end{cases}$$



Cilindro NON circolare

1. Spostamenti (assunti):
con θ incognita.

$$\begin{cases} u = C\Psi(y, z) \\ v = -z\varphi(x) \\ w = y\varphi(x) \end{cases}$$

Warping o
ingobbamento
della sezione

2. Deformazioni (legami
cinematici)

$$\gamma_{xy} = C \frac{\partial \Psi}{\partial y} - z \frac{d\varphi}{dx} ; \gamma_{xz} = C \frac{\partial \Psi}{\partial z} + y \frac{d\varphi}{dx}$$

3. Sforzi (relazioni
costitutive)

$$\begin{cases} \tau_{xy} = G \left(C \frac{\partial \Psi}{\partial y} - z \frac{d\varphi}{dx} \right) \\ \tau_{xz} = G \left(C \frac{\partial \Psi}{\partial z} + y \frac{d\varphi}{dx} \right) \end{cases}$$

3. Tensore degli Sforzi

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a)–Equazioni di equilibrio

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -Gz \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = Gy \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \end{array} \right.$$

Dalle ultime due (analoghe al cilindro circolare):

$$\theta' = \frac{d\phi}{dx} = \text{costante} = \phi$$

La 1° equazione di equilibrio

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \nabla^2 \Psi = 0 \quad \text{nel campo}$$

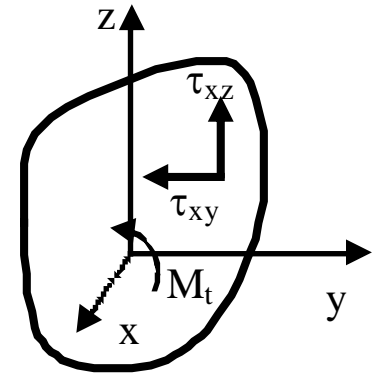
+ condizioni al contorno

b)–Condizioni al contorno:

b1)–sulla superficie NON CIRCOLARE

deve risultare:

$$\mathbf{T}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$



$$\begin{cases} \tau_{xy} = G \left(C \frac{\partial \Psi}{\partial y} - z \frac{d\phi}{dx} \right) \\ \tau_{xz} = G \left(C \frac{\partial \Psi}{\partial z} + y \frac{d\phi}{dx} \right) \end{cases}$$

cioè:

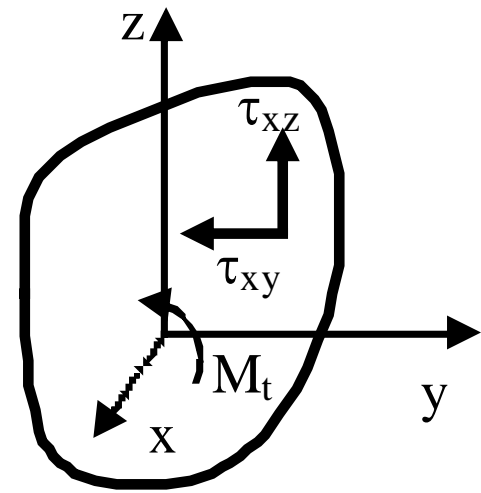
$$C \left[n_y \frac{\partial \Psi}{\partial y} + n_z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] = \frac{d\phi}{dx} [n_y z - n_z y]$$

| | |
|---|-------------|
| $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \nabla^2 \Psi = 0$ | nel campo |
| $C \frac{d\Psi}{dn} = \phi' (n_y z - n_z y)$ | al contorno |

b)–Condizioni al contorno:

b2)– sulle facce d'estremità $x=0,L$

$$\mathbf{T}^{(\pm x)} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \pm \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$$



$$\tau_{xy} = G \left(C \frac{\partial \Psi}{\partial y} - z \frac{d\varphi}{dx} \right); \tau_{xz} = G \left(C \frac{\partial \Psi}{\partial z} + y \frac{d\varphi}{dx} \right)$$

Poiche' $\varphi' = \text{cost}$, si puo' assumere tale $\text{cost} = C$

Momento
torcente
risultante:

$$M_t = \int_A (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dA = G\varphi' \int_A \left[y \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + y \right) - z \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - z \right) \right] dA = GJ\varphi'$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GJ} = \frac{M_t}{B} \Rightarrow M_t = B \frac{d\varphi}{dx}$$

Torsione: funzione sforzo

1. Campo degli sforzi (assunti):

$$\begin{cases} \tau_{xy}, \tau_{xz} \neq 0 \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

2. Equazioni di equilibrio $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$; $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0$

3. Compatibilità $\nabla^2 \tau_{xy} = 0$; $\nabla^2 \tau_{xz} = 0$ dove $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

la 1° equ. di equilibrio è soddisfatta dalla funz. sforzo ϕ

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial z} ; \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial y}$$

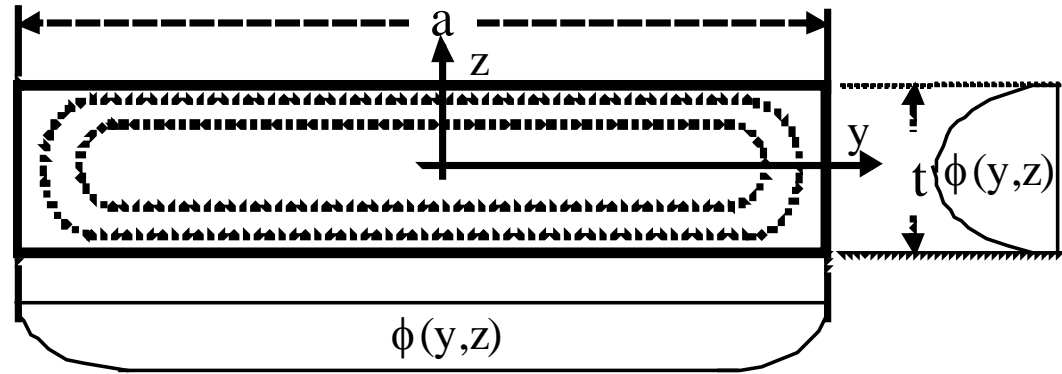
Bisogna soddisfare la compatibilità

$$\frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \Phi = 0 ; -\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Phi = 0$$

$$\nabla^2 \Phi = -2G \frac{d\phi}{dx} = \text{costante}$$

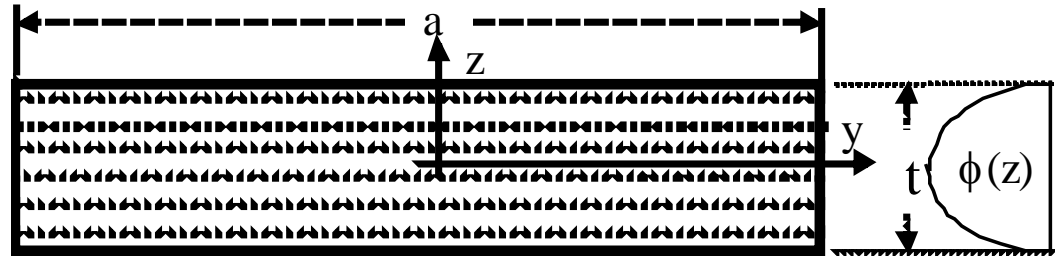
Torsione: Striscia rettangolare $a \gg t$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \cos t \\ \Phi = 0 \quad \text{al contorno} \end{cases}$$



Ipotesi: $\phi(z)$

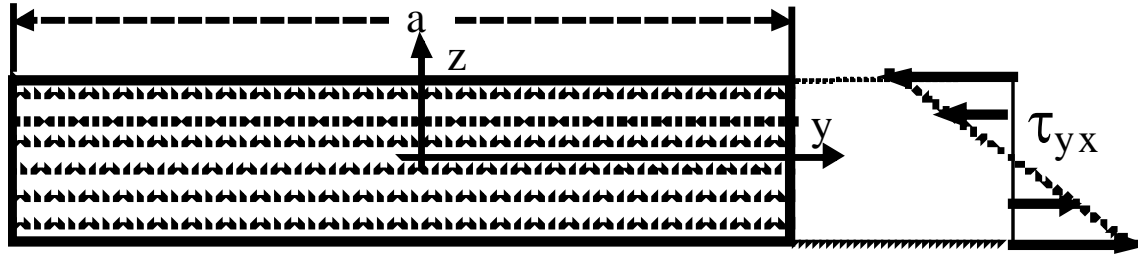
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2G \frac{d\phi}{dx}$$



$$\Phi = -G \frac{d\phi}{dx} \left[z^2 - \left(\frac{t}{2} \right)^2 \right] \quad \tau_{xy} = \frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial z} = 2Gz \frac{d\phi}{dx} \quad ; \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial y} = 0$$



Torsione: Striscia rettangolare $a \gg t$



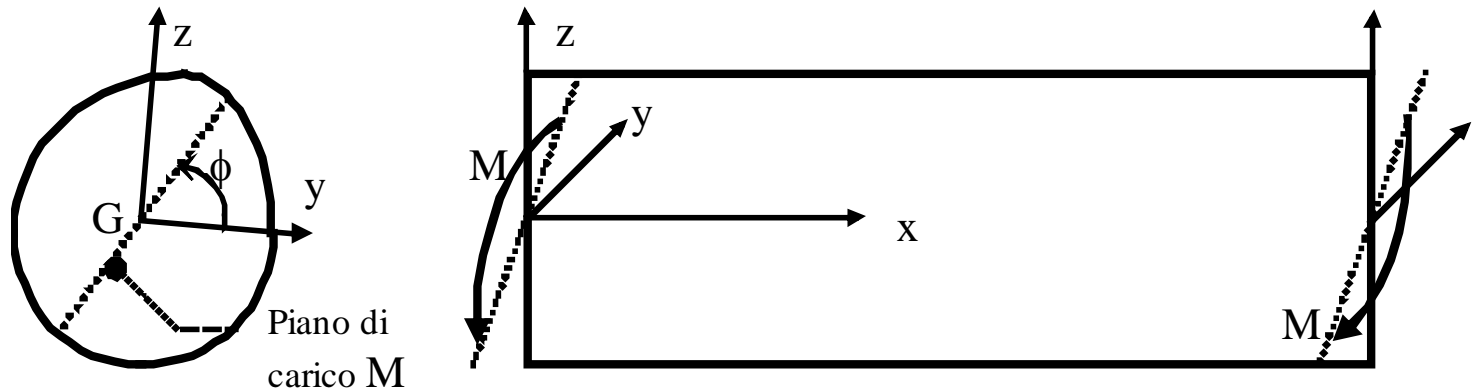
$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial z} = 2Gz \frac{d\varphi}{dx} \quad ; \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi(y, z)}{\partial y} = 0$$

$$J = -\frac{4}{\nabla^2 \Phi} \int_A \Phi dA = \frac{4a}{2G\varphi'} \int_{-t/2}^{t/2} G\varphi' \left[\left(\frac{t}{2} \right)^2 - z^2 \right] dz = \frac{at^3}{3}$$

$$M_t = 2 \int_A \Phi dA = 2aG\varphi' \int_{-t/2}^{t/2} \left[\left(\frac{t}{2} \right)^2 - z^2 \right] dz = \frac{Gat^3}{3} \varphi'$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GJ} = \frac{M_t}{B} \quad \Rightarrow \quad M_t = B \frac{d\varphi}{dx}$$

La Flessione



Si assumono come assi yz gli assi centrali della sezione (che passano per il baricentro G) e si ipotizza:

$$\sigma_{xx} = az + by$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0$$

1.Sforzi

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = az + by \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

2.Deformazioni (legami cinematici)

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x}{E} \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$

Sforzi e deformazioni lineari, soddisfano equilibrio e congruenza.

Resta da verificare le condizioni al contorno:

- sulla superficie laterale, dove non sono applicate forze, si può facilmente verificare che il vettore sforzo risulta nullo;
- sulla faccia $x=L$ e/o $x=0$, la risultante delle forze risulta:

$$R_x = \int_A \sigma_x dA = a \int_A z dA + b \int_A y dA = 0 ; R_y = R_z = 0$$

Poiché gli assi yz sono assi centrali della sezione, i momenti statici risultano nulli.

Risultanti:

$$\begin{cases} M_y = \int_A z \sigma_x dA = a \int_A z^2 dA + b \int_A zy dA = a I_y + b I_{yz} \\ M_z = \int_A y \sigma_x dA = a \int_A zy dA + b \int_A y^2 dA = a I_{yz} + b I_z \end{cases}$$

Momenti flettenti positivi quando tendono le fibre nel quadrante positivo

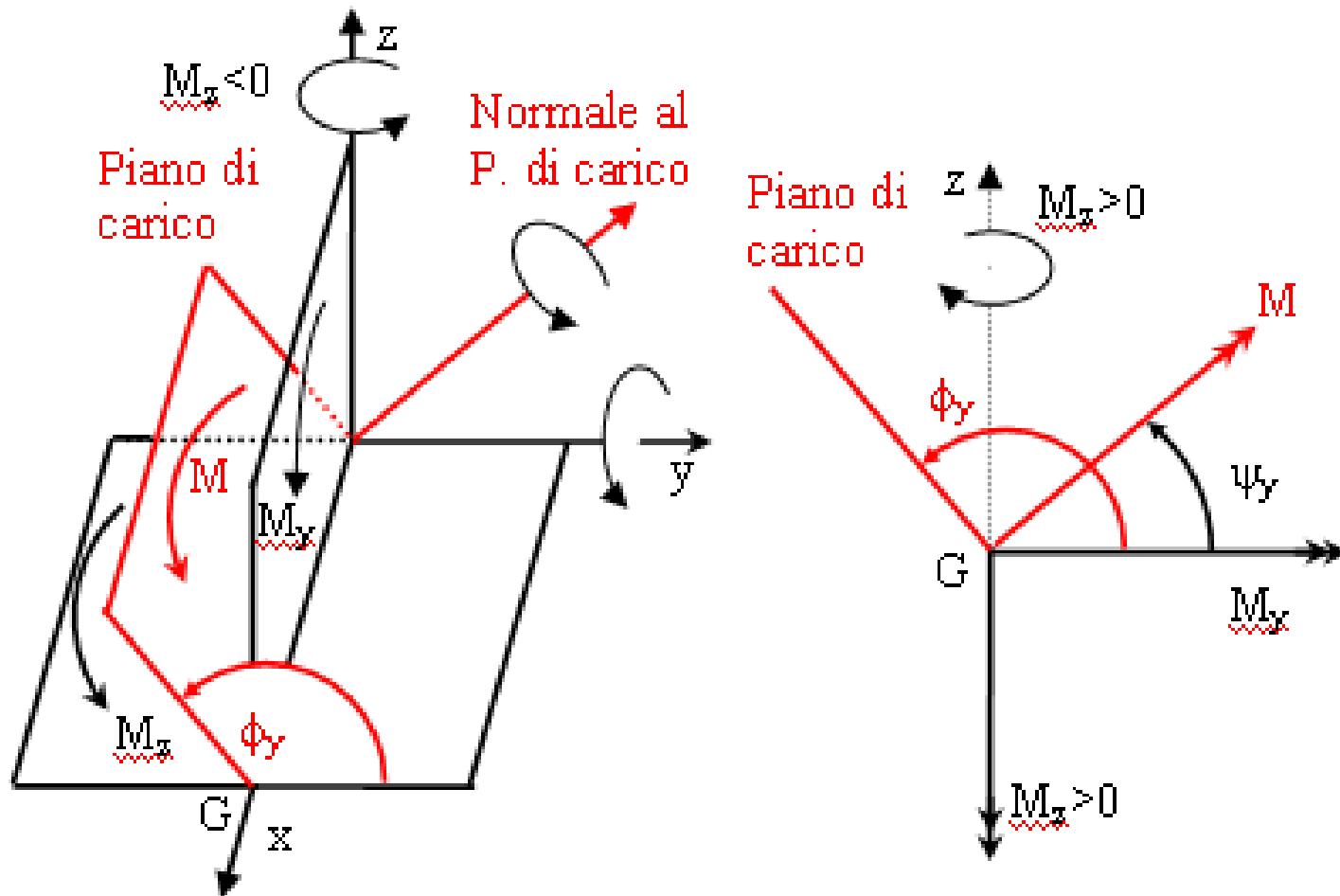
$$a = \frac{1}{I_y} \left[\frac{M_y - M_z I_{yz} / I_z}{1 - I_{yz}^2 / I_z I_y} \right] = \frac{\hat{M}_y}{I_y} \quad ; \quad b = \frac{1}{I_z} \left[\frac{M_z - M_y I_{yz} / I_y}{1 - I_{yz}^2 / I_z I_y} \right] = \frac{\hat{M}_z}{I_z}$$

Assi yz assi centrali con orientamento generico:

$$\sigma_{xx} = \frac{\hat{M}_y}{I_y} z + \frac{\hat{M}_z}{I_z} y$$

$$a = \frac{1}{I_y} \left[\frac{M_y - M_z I_{yz} / I_z}{1 - I_{yz}^2 / I_z I_y} \right] = \frac{\hat{M}_y}{I_y} \quad ; \quad b = \frac{1}{I_z} \left[\frac{M_z - M_y I_{yz} / I_y}{1 - I_{yz}^2 / I_z I_y} \right] = \frac{\hat{M}_z}{I_z}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\hat{M}_y}{I_y} z + \frac{\hat{M}_z}{I_z} y$$



Sistema di Assi: assi YZ assi principali d'inerzia

Poiché gli assi YZ sono assi principali:

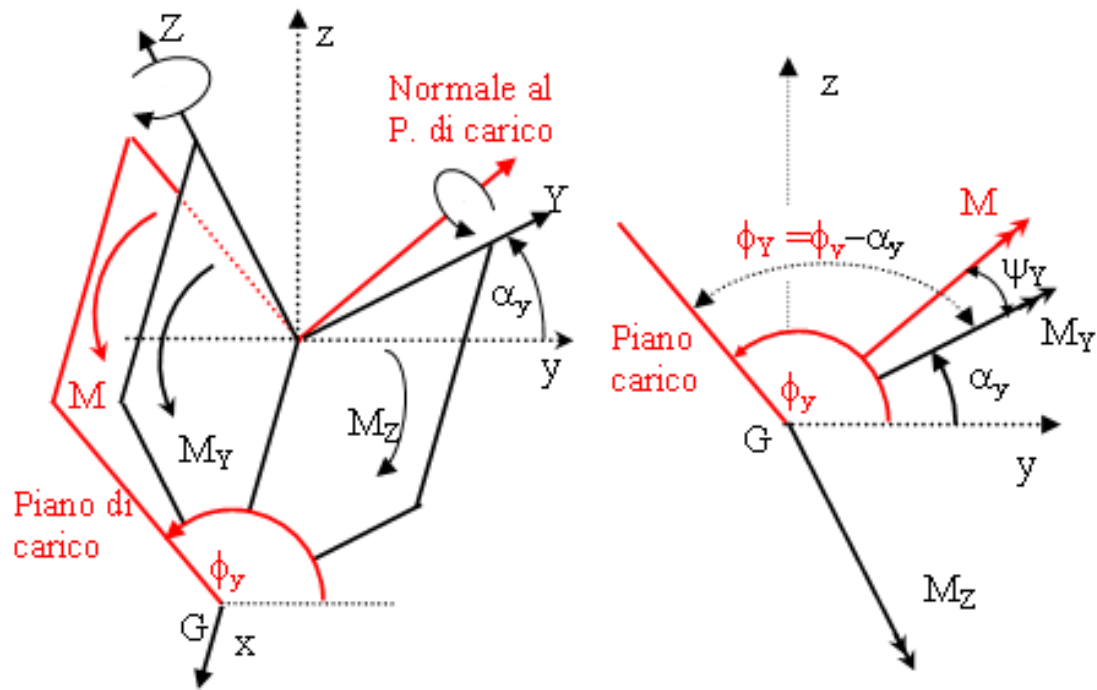
$$a = \frac{1}{I_y} \left[\frac{M_y - \cancel{M_z I_{yz} / I_z}}{1 - \cancel{I_{yz}^2 / I_z I_y}} \right] = \frac{M_y}{I_y} \quad ; \quad b = \frac{1}{I_z} \left[\frac{M_z - \cancel{M_y I_{yz} / I_y}}{1 - \cancel{I_{yz}^2 / I_z I_y}} \right] = \frac{M_z}{I_z}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{M_Y}{I_Y} Z + \frac{M_Z}{I_Z} Y$$

Dove:

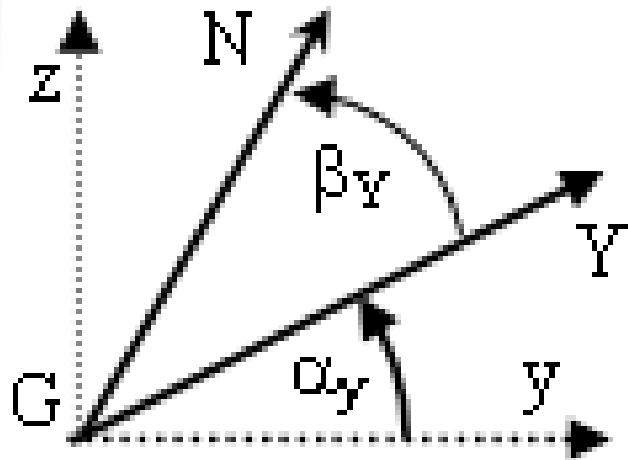
- M_Y , M_Z sono le componenti del momento M rispettivamente intorno agli assi principali Y,Z;
- I_Y , I_Z i momenti principali d'inerzia.

$$\sigma_{xx} = \frac{M_Y}{I_Y} z + \frac{M_Z}{I_Z} Y$$



Posizione Asse Neutro NN

L'asse neutro è l'asse della sezione sulla quale $\sigma_x=0$



$$\begin{cases} Y = N \cos \beta_Y \\ Z = N \sin \beta_Y \end{cases}$$

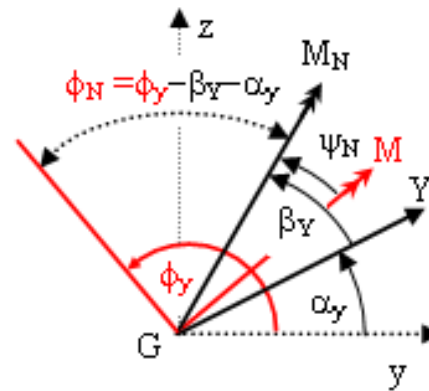
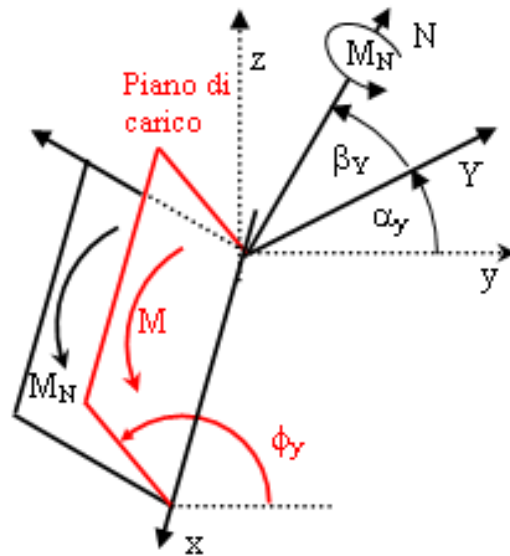
$$\tan \beta_Y = \frac{Z}{Y} = -\frac{M_Z}{M_Y} \frac{I_Y}{I_Z}$$

$$\begin{cases} M_Y = M \sin \phi_Y \\ M_Z = M \cos \phi_Y \end{cases}$$

$$\tan \beta_Y = -\frac{I_Y}{I_Z} \cotan \phi_Y$$

Sistema di assi cartesiani N-D (asse neutro e asse ad esso ortogonale)

$$\sigma_{xx} = \frac{M_N}{I_N} D$$



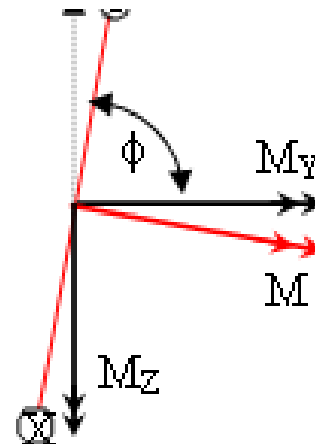
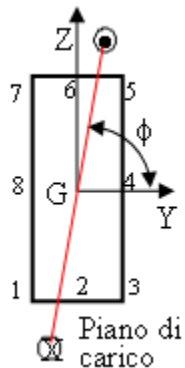
Posizione Asse Neutro

$$\tan \beta_Y = -\frac{I_Y}{I_Z} \operatorname{ctan} \phi_Y$$

Il piano neutro è ortogonale al piano di carico solo se $I_Y=I_Z$.

Se $I_Y \neq I_Z$ la struttura tende ad inflettersi nel piano in cui la rigidità a flessione è minore e non in quello del momento, ovvero:

l'asse NN non coincide con la perpendicolare al piano di carico ma è ruotato di un angolo ε verso l'asse principale rispetto al quale la sezione presenta un momento d'inerzia minore e la flessione è detta *flessione deviata* ; se $\varepsilon=0$ si ha flessione *retta o diretta*.



Nello studio della flessione si possono impiegare indifferentemente gli assi yz, YZ, ND, ognuno dei quali ha vantaggi e svantaggi:

–**il sistema (centrale) yz** presenta il vantaggio di essere arbitrario ma fornisce poche informazioni sulle proprietà della struttura e quindi si ha una scarsa visione fisica del problema;

–**il sistema (centrale) YZ** di assi principali presenta il vantaggio di leggere la struttura attraverso le proprie caratteristiche intrinseche e di utilizzare una formula in cui lo sforzo σ è la somma di ciò che avviene separatamente intorno all'asse Y e all'asse Z. In altri termini lo studio della flessione deviata può essere condotto sommando gli sforzi ottenuti considerando due distinti problemi:

a) $M_Z=0$ ed $M_Y \neq 0$, b) $M_Z \neq 0$ ed $M_Y=0$. Lo svantaggio risiede nella necessità di ricerca degli assi principali;

–**il sistema (centrale) ND** presenta il vantaggio di individuare i punti più sollecitati che sono i punti più distanti dall'asse neutro e di utilizzare una formula per σ particolarmente semplice. Lo svantaggio risiede nel fatto che gli assi ND variano al variare dell'inclinazione del carico; in altri termini mentre gli assi principali sono caratteristici della sezione, l'asse neutro dipende anche dalla sollecitazione.

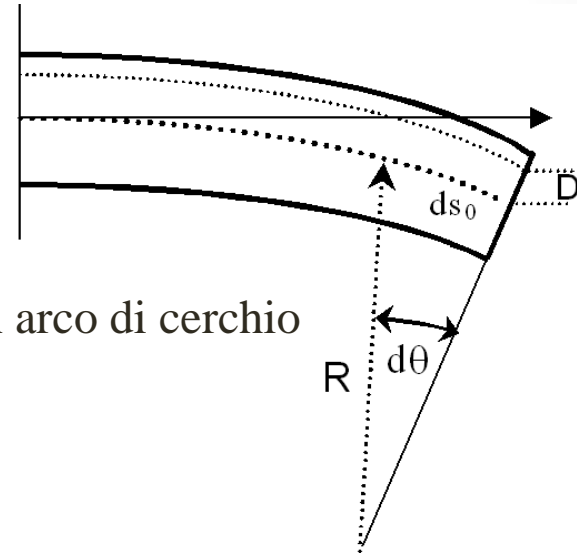
Teoria semplificata della Flessione

Ipotesi: “*le sezioni piane ed ortogonali alla linea media ruotino mantenendosi piane ed ortogonali alla linea media deformata*”.

$$\varepsilon_x = \frac{ds - ds_0}{ds} = \frac{(R + D)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta} = \frac{D}{R}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{R} D$$

La struttura si inflette come un arco di cerchio



Non essendoci carichi in direzione normale alla sezione, deve risultare:

$$\int_A \sigma_x dA = \frac{E}{R} \int_A D dA = 0$$

Nel piano della sezione c'è una linea dove gli sforzi risultano nulli che passa per il baricentro della sezione; tale linea è detto asse neutro.

Dall'equilibrio
dei momenti:

$$\int_A \sigma_x dA = \frac{E}{R} \int_A D^2 dA = \frac{EI}{R} = M \Rightarrow \frac{E}{R} = \frac{M}{I}$$

Sforzo

$$\sigma_x = \frac{E}{R} D = \frac{M}{I} D$$

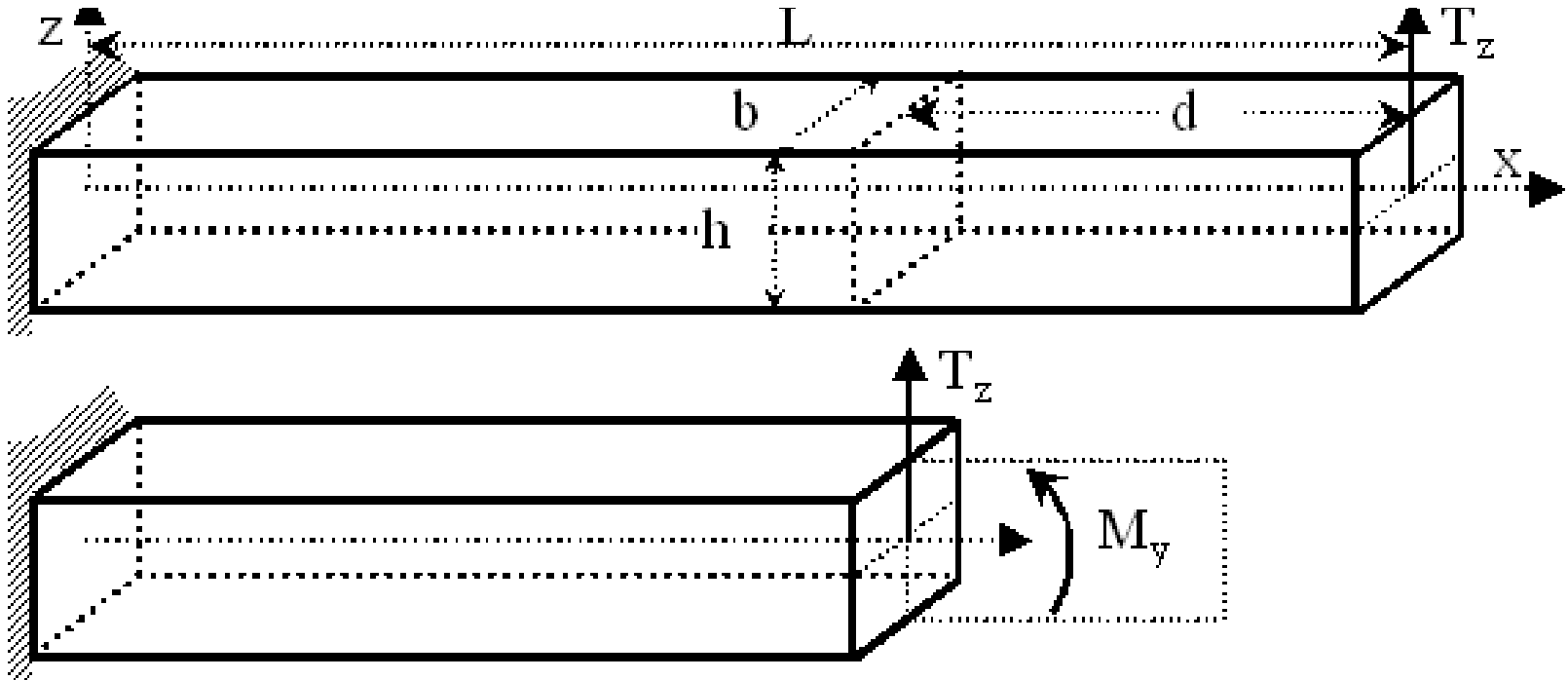
Curvatura

$$\frac{1}{R} = \chi = \frac{w''}{[1 + w'^2]^{3/2}} \cong \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$\frac{E}{R} = \frac{M}{I} \Rightarrow M_f = EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

Flessione per Taglio

Consideriamo una T_z nel piano di simmetria xz che induce flessione solo in tale piano in direzione del verso positivo dell'asse z .



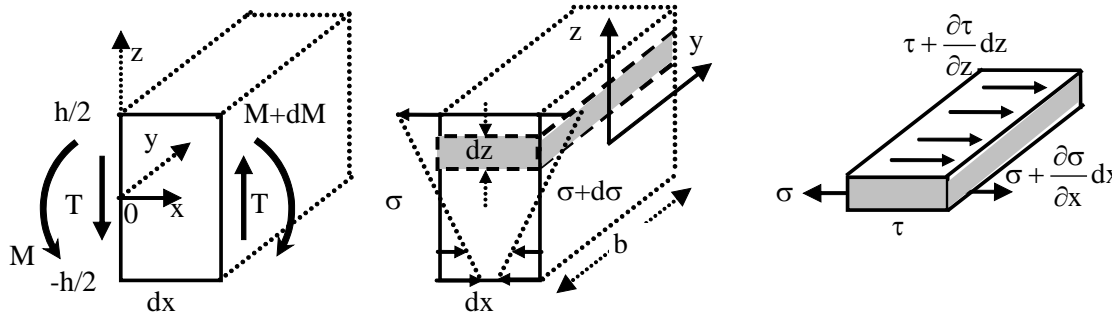
nella sezione trasversale posta ad $x < L$, si esercita un momento $M = T_z d$ ed una forza di taglio $T = T_z$.

A)–La presenza del momento, comporta l’insorgere di sforzi assiali σ che possiamo valutare con la formula della flessione:

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{I} z \quad ; \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

$$M(x) = T_z (x - L)$$

B)–La presenza della T genera sforzi di taglio τ il cui valore può essere calcolato imponendo l’equilibrio di un elemento $b dx dz$.

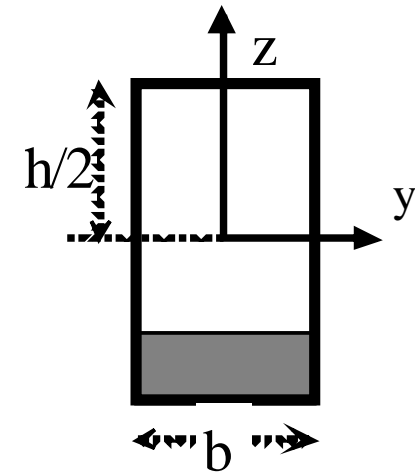


$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} dx (bdz) + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz (bdx) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = - \int_{z_0}^z \frac{\partial \sigma}{\partial x} dz + C_0$$

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{I} z = \frac{T_z (x-L)}{I} z \Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{T_z}{I} z$$

$$\tau = C_0 - \int_{z_0}^z \frac{\partial \sigma}{\partial x} dz = C_0 - \frac{T}{Ib} \int_{z_0}^z z dA =$$

$$- \frac{T}{Ib} \int_{-h/2}^z z dA = \frac{T}{Ib} \int_z^{-h/2} z dA = \frac{T}{Ib} Q_y$$

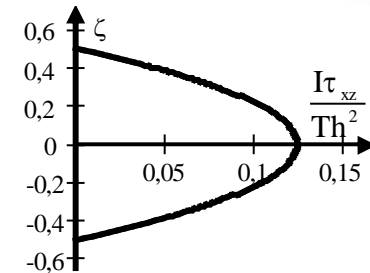


In particolare per sezione rettangolare:

$$Q_y = \int_z^{-h/2} z dA = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

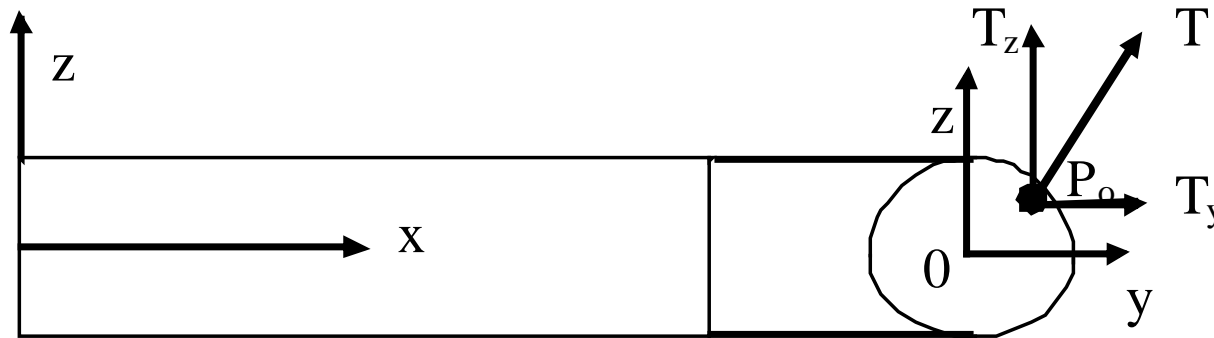
Momento statico rispetto all'asse y

$$\tau_{xz} = \frac{T_z}{2I_y} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \Rightarrow \frac{I_y \tau_{xz}}{T_z h^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \zeta^2 \right)$$



Flessione e torsione per Taglio

In generale la sezione, è di forma qualsiasi e la forza applicata \mathbf{T} ha orientamento e punto di applicazione tale da generare una sollecitazione combinata di flessione, taglio e torsione.



E' sempre possibile pensare di sostituire la \mathbf{T} applicata in $P_0(y_0, z_0)$, con sistema staticamente equivalente di una forza \mathbf{T} applicata in un altro punto P^* più una coppia.

Centro di Taglio (o di Flessione)

Tra tutti i possibili punti P^* , esiste un punto dove:

l'applicazione della T induce solo flessione senza rotazione;

Tale punto è un punto caratteristico della sezione detto *Centro di Flessione o di Taglio (C.T.)*.

Trasportando T nel C.T. il problema è riportato, per la linearità del problema, allo studio dei due distinti casi:

–di flessione con taglio: sforzi assiali σ_{xx} e di taglio τ_{xy} , τ_{xz} senza rotazione φ .

–di torsione: sforzi di taglio τ_{xy} , τ_{xz} con rotazione φ .

$$\sigma_{xx} \neq 0 \quad ; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^T + \tau_{xy}^{M_t} \neq 0 \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^T + \tau_{xz}^{M_t} \neq 0$$

$$\sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{yz} = 0$$

Centro di Taglio (o di Flessione)

Affinchè a seguito dell'applicazione della sola T si abbia solo flessione (senza rotazione) il Centro di Taglio si deve trovare in un punto del piano della sezione rispetto al quale il momento torcente risultante delle forze di taglio τ risulti nullo.

La condizione di annullamento del momento torcente è quindi una condizione che può essere utilizzata per determinare il C.T.

Tuttavia in alcuni casi, l'individuazione del C.T. risulta semplificata e talvolta immediata.

In particolare nei seguenti casi:

- sezione con un asse di simmetria: il C.T. giace su tale asse;
- sezione con due assi di simmetria: il C.T. è il punto di intersezione di detti due assi e coincide con il baricentro della sezione.