Meccanica delle Vibrazioni

Lo studio del comportamento statico non esaurisce l'analisi di una struttura elastica ed in particolare di una struttura aerospaziale che, essendo soggetta a forze variabili nel tempo, subisce spostamenti che dipendono dal tempo oltre che dello spazio.

E' quindi indispensabile "capire" anche da un punto di vista dinamico la struttura per essere in grado di comprenderne il comportamento in presenza di carichi che dipendono dal tempo.

Un problema dinamico è caratterizzato fondamentalmente dalla presenza delle forze d'inerzia che non intervengono nei problemi della statica.

Principio di Hamilton

A)–Moto di una particella.

Per la 2° legge di Newton il moto è retto dalla:

$$m\ddot{x}(t) = f(x,t)$$

Se la forza esterna è conservativa ponendo:

$$f(x,t) = -\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \quad ; \quad T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0}$$

Posto (*funzione di Lagrange* o potenziale cinetico): $\mathcal{L}(x,\dot{x},t) = T(\dot{x}) - V(x,t)$

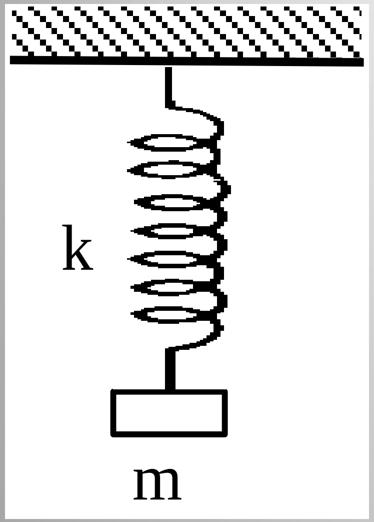
notando che V è indipendente da dx/dt e T da x:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0}$$

nella quale riconosciamo l'equazione di Eulero corrispondente alla stazionarietà del funzionale, (*integrale di Hamilton)*

$$\boxed{J[x,\dot{x},t] = \int_{t_0}^{t_F} \mathcal{L}(x,\dot{x},t)dt}$$

Esempio: Sistema massa-molla



$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad ; \quad U = \frac{kx^2}{2}$$

$$L = T - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad T - U = m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

Principio di Hamilton

A)–Sistemi discreti non vincolati soggetti a forze conservative.

Per la 2° legge di Newton il moto del sistema è retto dalle:

$$m_n \ddot{q}_n(t) = f_n(q_1, q_2, \dots q_N, t) \quad ; \quad \dots . \quad ; \quad n = 1,2,\dots, N$$

ricordando la definizione di energia cinetica ed energia potenziale:

$$T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_N) = \frac{1}{2}\sum_1^N m_n \dot{q}_n^2 \qquad f_n(q_1, q_2, \dots q_N, t) = -\frac{\partial V(q_1, q_2, \dots q_N, t)}{\partial q_n}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = -\frac{\partial V}{\partial q_n} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} + \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0}$$

Posto (*funzione di Lagrange* o potenziale cinetico):

$$L(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - V(q, t)$$

notando che V è indipendente da dq/dt e T da q:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0}$$

nella quale riconosciamo l'equazione di Eulero corrispondente alla stazionarietà del funzionale, (*integrale di Hamilton)*

$$\boxed{J[q, \dot{q}, t] = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\,dt}$$

Principio di Hamilton

A)–Sistemi elastici discreti soggetti a forze conservative.

$$L(q,\dot{q},t) = \mathsf{T}(\dot{q}) - [\mathsf{V}(q,t) + \mathsf{U}(q,t)]$$

B)–Sistemi elastici continui soggetti a forze conservative.

$$L(\varphi,\dot{\varphi},\varphi',\varphi'',..) = \mathsf{T} - (\mathsf{V} + \mathsf{U})$$

$$\boxed{J[\varphi,\dot{\varphi},\varphi',x,t] = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^L L(\varphi,\dot{\varphi},\varphi',x,t)\,dx\,dt}$$

Le funzioni all'interno del funzionale dipendono dallo spazio e dal tempo

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial \varphi'} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0}$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial L}{\partial \varphi'}\delta\varphi\right|_0^L = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\delta\varphi\right|_0^t = 0}$$

Equazione di Eulero Lagrange

Esempio: Vibrazioni assiali della trave

Energie cinetica

$$T = \frac{1}{2} A\rho \int_0^L \dot{u}^2 dx \quad ; \quad U = \frac{EA}{2} \int_0^L u'^2 dx$$

Energie elastica

$$T - U = \frac{A}{2} \int_0^L (\rho \dot{u}^2 - E u'^2) dx$$

$$L(u, \dot{u}, u', x, t) = \frac{A}{2} (\rho \dot{u}^2 - E u'^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho A \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$$

$$\boxed{EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial u'} \delta u \right|_0^L = \left. EA \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right|_0^L = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \delta u \right|_0^t = \left. \mu \frac{\partial u}{\partial t} \delta u \right|_0^t = 0$$

Principio di d’Alembert

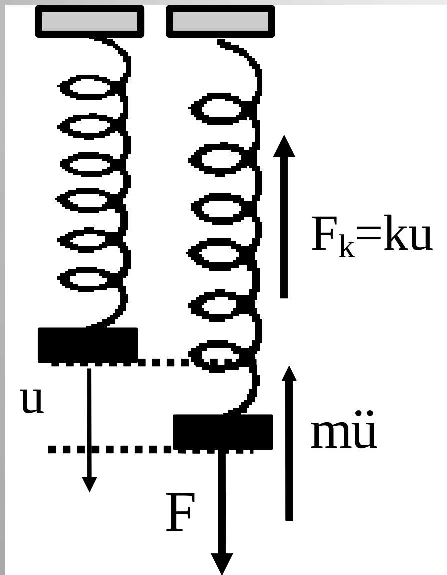
“*In ogni istante, in condizioni di quiete o di moto, le forze perdute equilibrano le corrispondenti reazioni vincolari*”.

valgono le due seguenti regole pratiche:

1)–“***Le equazioni della statica*** *per un elemento soggetto a forze attive e vincoli qualsiasi possono essere ricavate dalle corrispondenti equazioni della dinamica ponendo a zero velocità ed accelerazioni*”.

2)–“***Le equazioni della dinamica*** *per un elemento soggetto a forze posizionali e vincoli privi di attrito possono essere ricavate dalle corrispondenti equazioni della statica* ***sostituendo alla forza attiva la forza perduta (o, in maniera equivalente, aggiungendo la forza d’inerzia)***”.

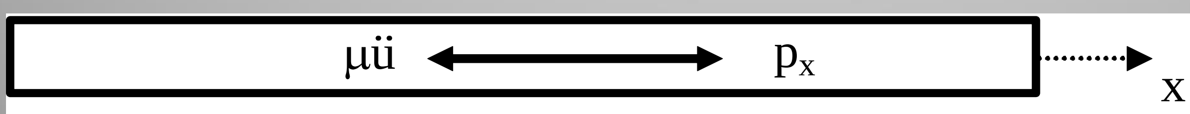
Esempi:



- **massa-molla**

$$\boxed{ku = F \quad \Rightarrow \quad ku = F - m\ddot{u}}$$

- **Trave assiale**



$$\boxed{AE\frac{d^2u(x)}{dx^2} + p_x = 0 \quad \Rightarrow \quad AE\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + p_x - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$

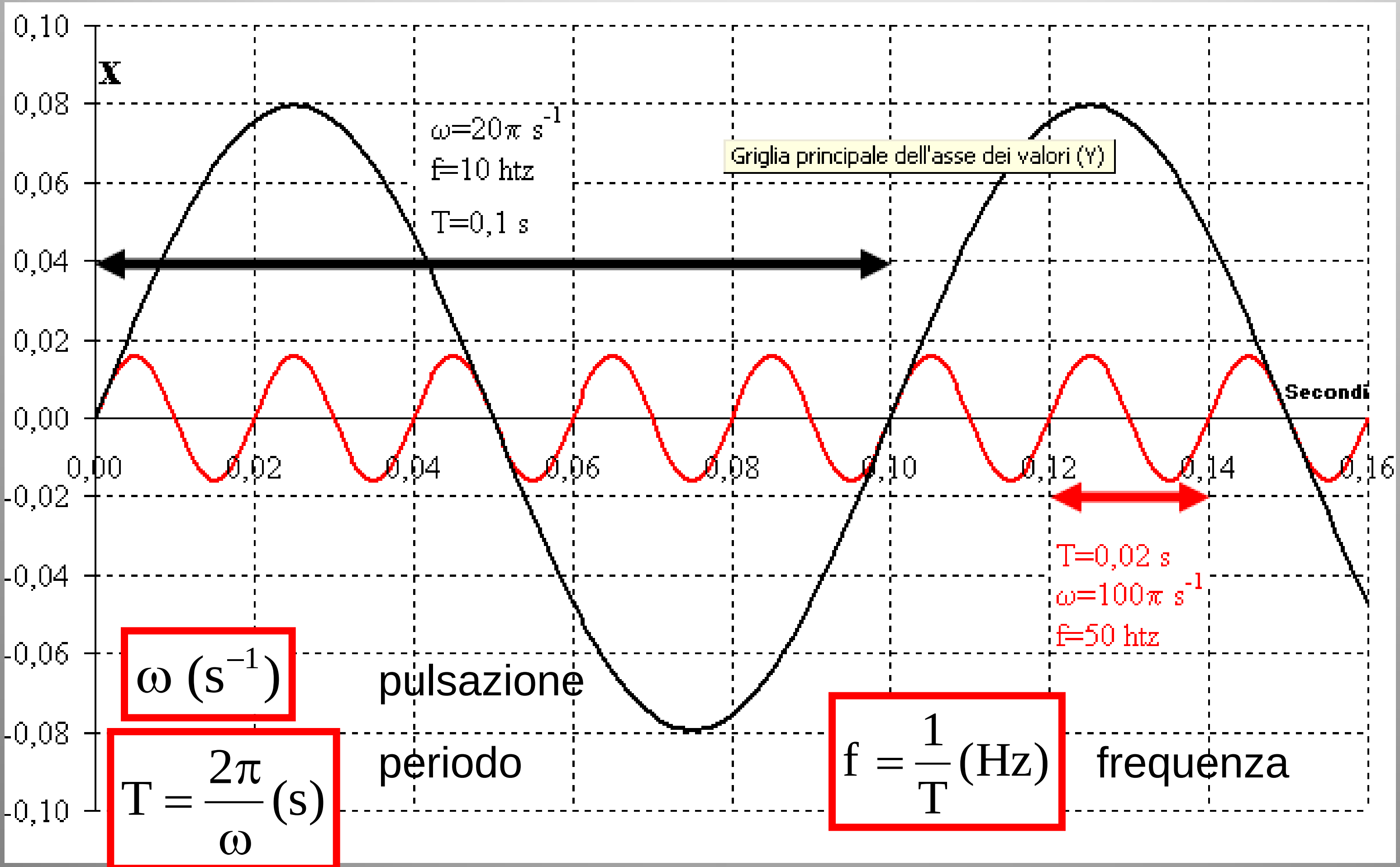
Moto armonico

$$\boxed{x = c_1 \cos\omega t + c_2 \mathrm{sen}\omega t}$$

con ω, c_1, c_2, costanti di cui la prima ed almeno una delle altre due non nulle.

Le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π, cioè:

$\cos(\omega t) = \cos(\omega t + 2\pi) = \cos[\omega(t + 2\pi/\omega)] \Rightarrow x(t) = x(t + 2\pi/\omega) = x(t + T)$.



$\boxed{\omega\ (s^{-1})}$ pulsazione

$\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega}(s)}$ periodo

$\boxed{f = \dfrac{1}{T}(Hz)}$ frequenza

Moto armonico

$$x = c_1 \cos\omega t + c_2 \mathrm{sen}\omega t$$

$$c_1 = a\cos\theta \quad ; \quad c_2 = -a\,\mathrm{sen}\,\theta$$

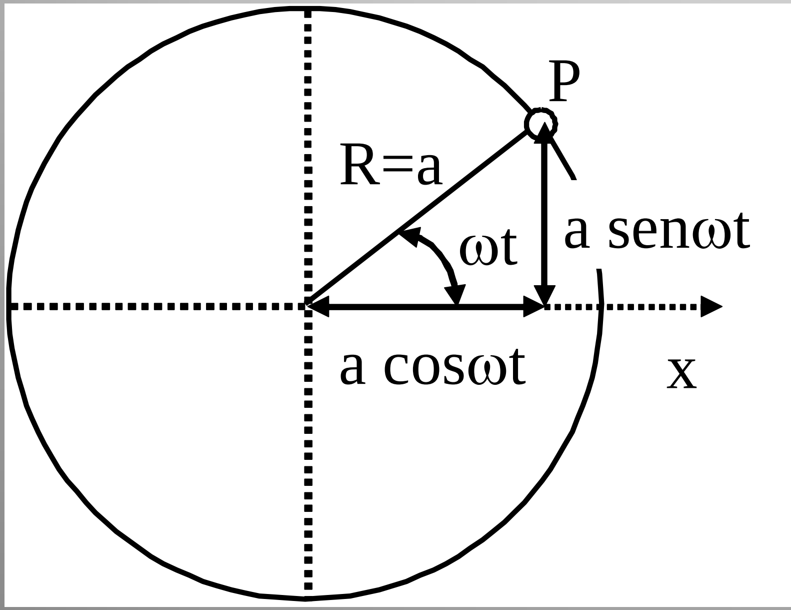
$$x = a(\cos\theta\cos\omega t - \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\omega t)$$
$$= a\cos(\omega t + \theta)$$

a è l'*ampiezza massima*;

(ωt+θ) la fase all'istante t;

θ la fase iniziale a t=0:

$\omega\ (s^{-1})$ $\quad f = \frac{1}{T}\,(\mathrm{Hz})$ $\quad T = \frac{2\pi}{\omega}\,(s)$



Moto a velocità angolare ω costante, di P su una circonferenza di raggio *a*.

La frequenza indica il numero di giri nell'unità di tempo del punto P e si misura in *hertz* (Hz: 1 Hz=1 s^{-1} e corrisponde al moto di un punto che compie un giro in un secondo).

Il periodo è il tempo impiegato per percorrere un giro, si misura quindi in secondi (s).

Rappresentazione complessa del Moto armonico

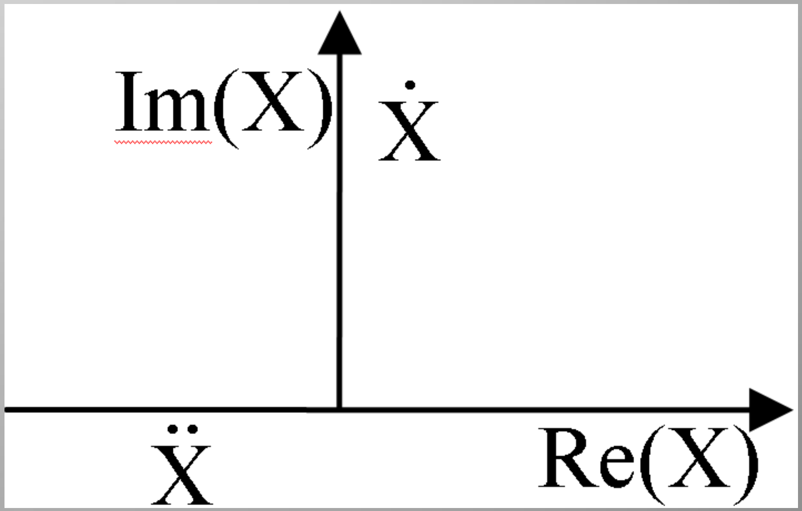
$$\boxed{x = a\cos(\omega t + \theta) = \mathrm{Re}(X)}$$

$$X = ae^{j(\omega t+\theta)} = a\left[\cos(\omega t + \theta) + j\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta)\right]$$

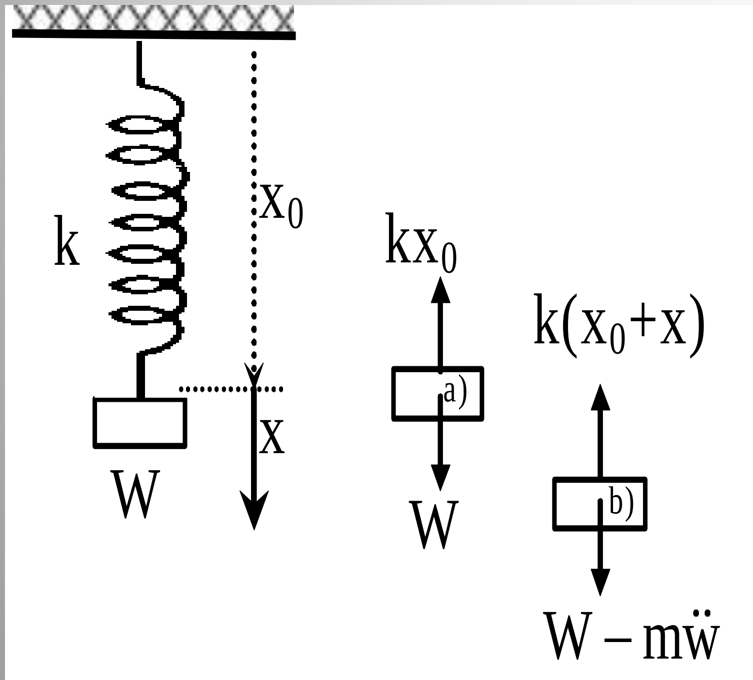
$$\boxed{X = ae^{j(\omega t+\theta)} = ae^{j\theta}e^{j\omega t} = Ae^{j\omega t}}$$

$$\frac{dX}{dt} = j\omega X$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\omega^2 Ae^{j\omega t}$$



A)–Sistema massa-molla



La molla, sotto il carico statico W, raggiunge la posizione di equilibrio x_0, dato dall'equazione:

$$kx_0 = W$$

A seguito del'applicazione di una forza F(t) e/o di uno spostamento o velocità iniziale, la massa vibra spostandosi di x e nascono le forze d'inerzia.

$$k(x + \cancel{x_0}) = \cancel{W} + F - m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = F$$

$$\boxed{\begin{gathered}\ddot{x} + \omega^2 x = F/m \\ x(0) = x_0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = v_0\end{gathered}}$$

Si dice che il sistema compie:
– vibrazioni libere se F(t)=0;
– vibrazioni forzate se F(t)≠0.

A1)–Vibrazioni libere

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = c_1 \cos\omega t + c_2 \mathrm{sen}\omega t$$

$$x(0) = c_1 \cos(\omega 0) + c_2 \mathrm{sen}(\omega 0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \omega[-c_1 \mathrm{sen}(\omega 0) + c_2 \cos(\omega 0)] = v_0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = v_0 / \omega$$

$$x = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega} \mathrm{sen}\omega t$$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad ; \quad \theta = \arccos\frac{x_0}{a} = -\mathrm{arcsen}\frac{v_0}{a\omega}$$

Le condizioni iniziali governano l’ampiezza e la fase ma **NON** influenzano la pulsazione ω che è una caratteristica del sistema.

Pertanto se F(t)=0, il moto è armonico e caratterizzato da:

–un parametro (la pulsazione ω o periodo T o frequenza f) che dipende solo dalle caratteristiche m,k del sistema;

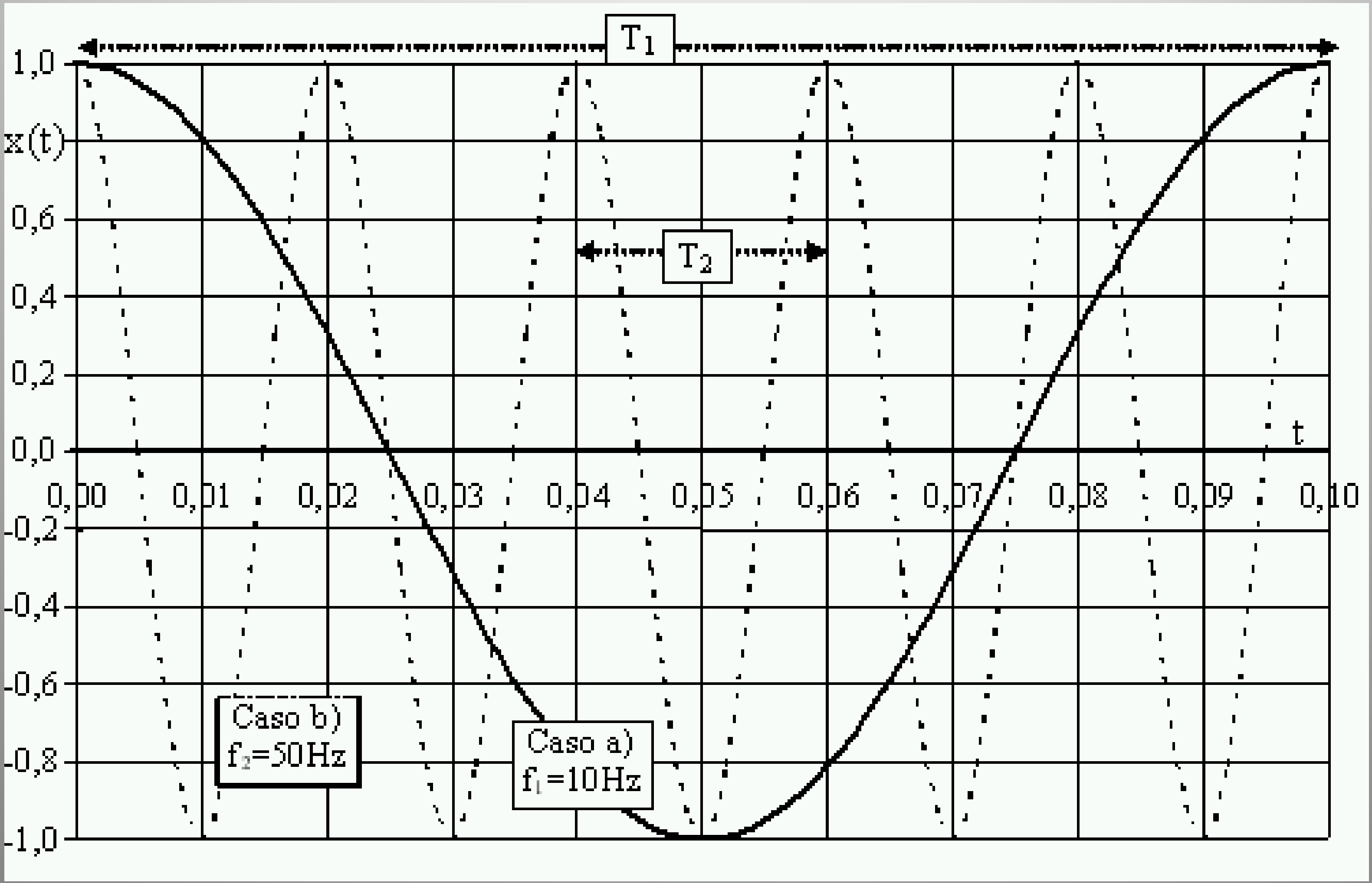
–da altre quantità, ampiezza e fase, che invece dipendono dalle condizioni iniziali.

Moto armonico: x_0=1,v_0=0

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t$$

Caso a) f_1=10Hz, (T_1=0,1 sec ; $\omega_1 = 20\pi$ sec^{-1});

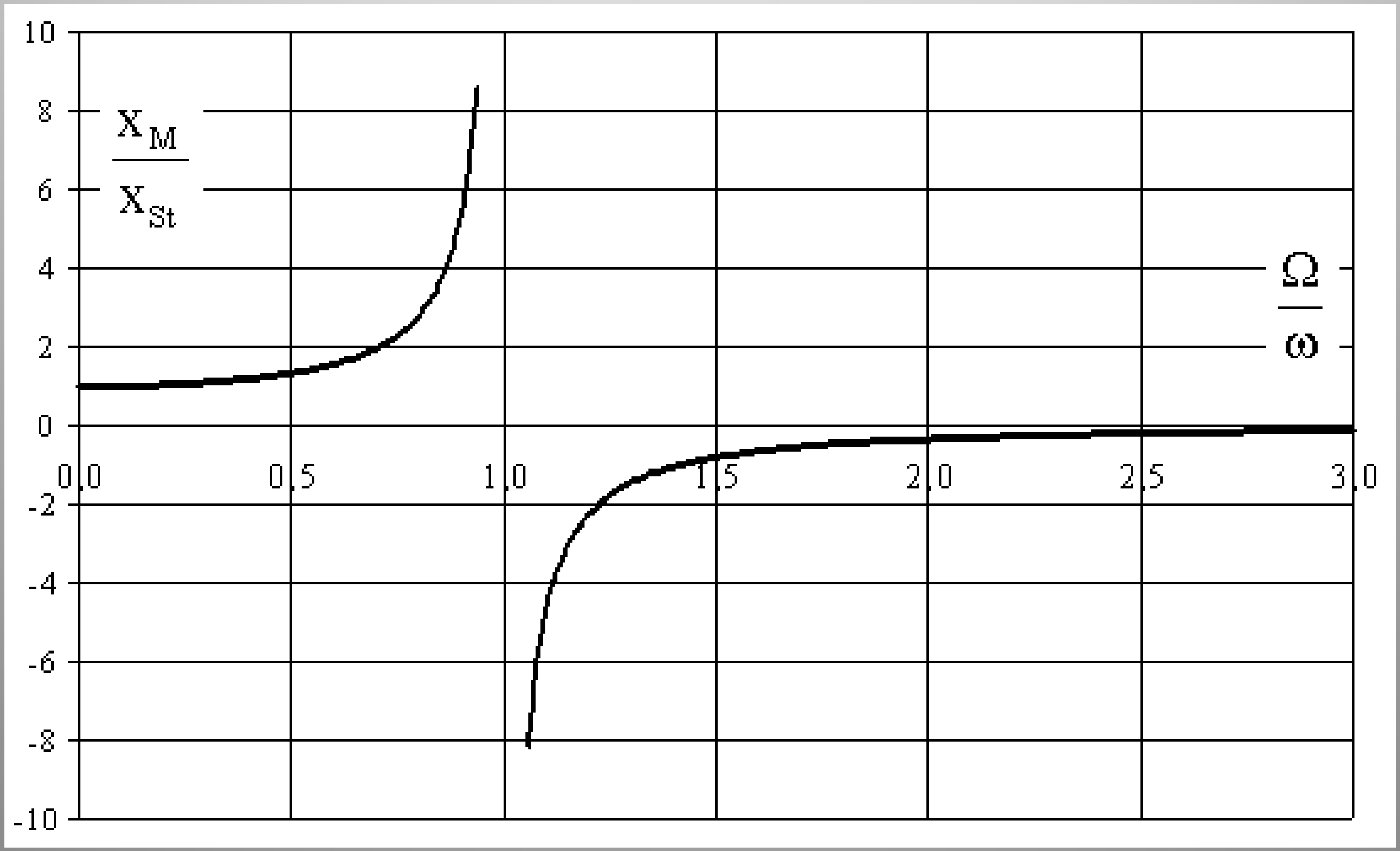
Caso b) f_2=50Hz, (T_2=0,02sec ; $\omega_2 = 100\pi$ sec^{-1}).



A2)–Vibrazioni forzate in modo periodico

$$M\ddot{x} + Kx = P_0 \operatorname{sen} \Omega t \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = P \operatorname{sen} \Omega t \;;\; P = \frac{P_0}{M}$$

$$\frac{x_{Max}}{x_{Stat}} = \frac{1}{[1-(\Omega/\omega)^2]}$$



Sistema dissipativo: Vibr. libere

$$M\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$x = e^{pt}$$

$$p^2 + 2\varepsilon p + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}$$

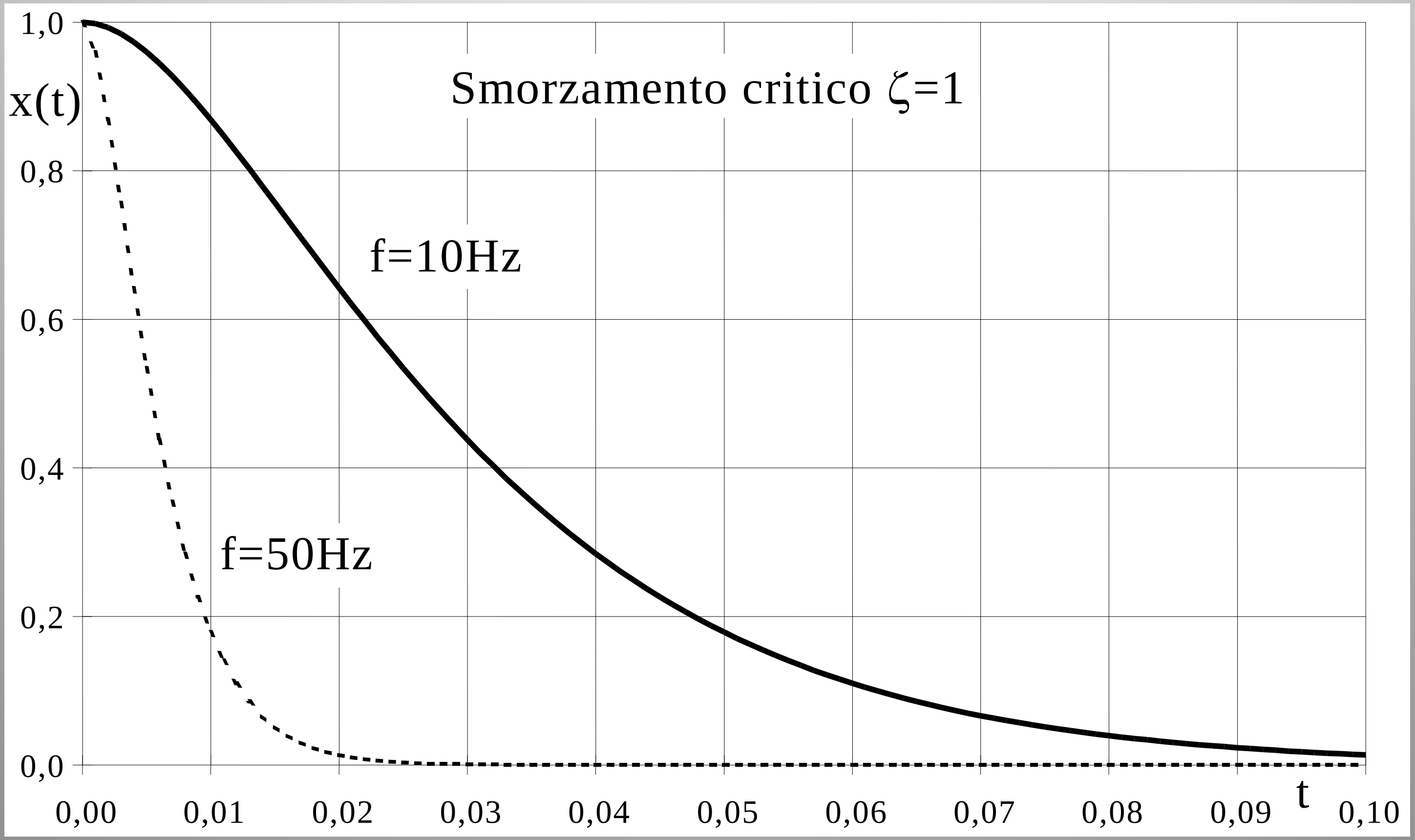
Il moto è diverso a seconda del valore del parametro di smorzamento ε:

- **1)–**Se ε=ω lo *smorzamento è detto critico*.
- **2)**–Il sistema è detto *sotto-smorzato* se ε<ω.
- **3)**–Il sistema è detto *sovra-smorzato* se ε>ω.

1)– Se ε=ω: *smorzamento critico*

$$x(t) = e^{-\varepsilon t}\left[x_0 + (v_0 + \varepsilon x_0)t\right]$$

Smorzamento proporzionale alla frequenza naturale di vibrazione ε = ω ζ

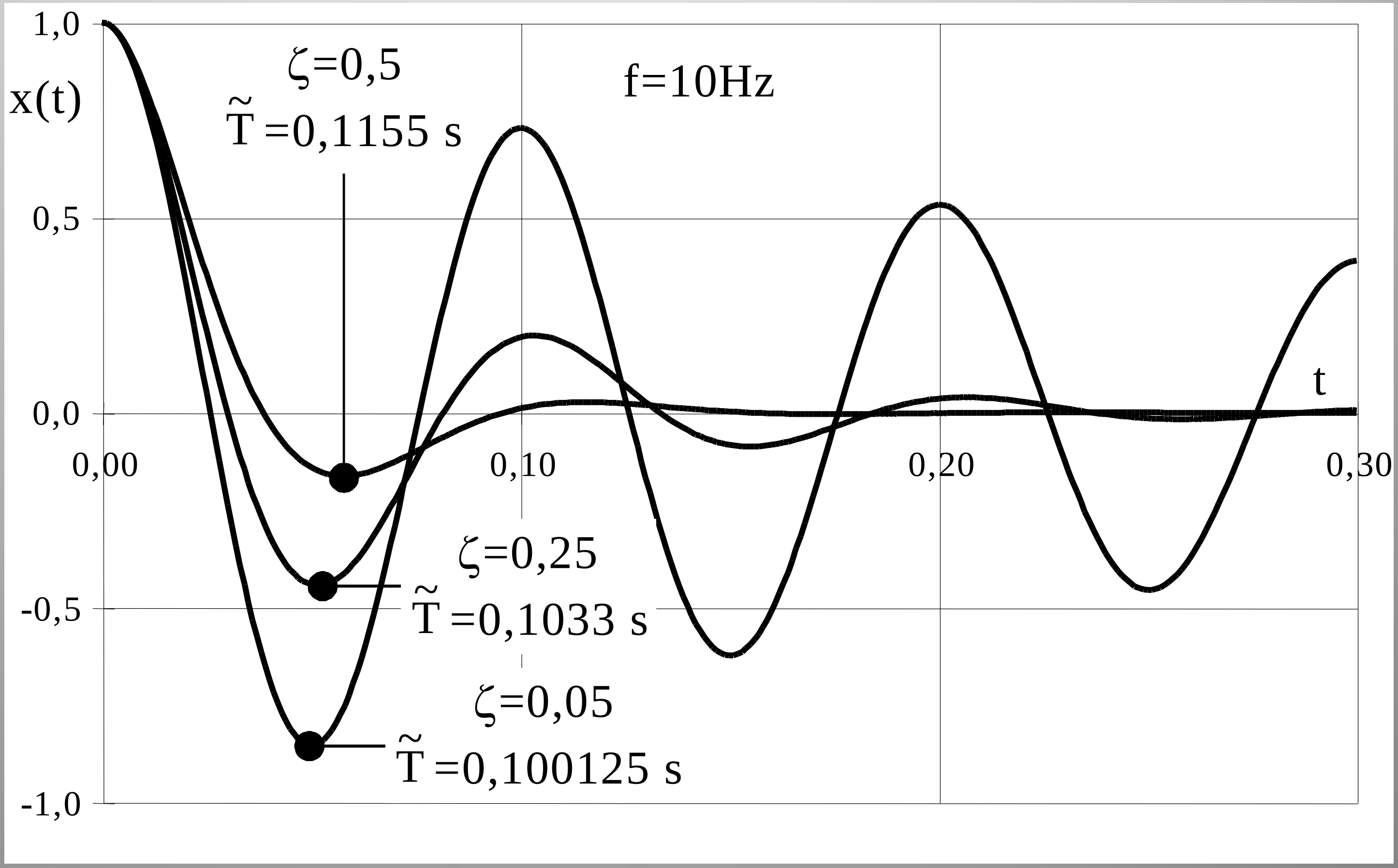


2)– Se ε<ω: *sotto-smorzato*

$$p_{1,2} = -\varepsilon \pm j\tilde{\Omega} \qquad dove \qquad \tilde{\Omega} = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} = \omega\sqrt{1-\zeta^2} > 0$$

$$\mathrm{x(t)} = \mathrm{e}^{-\varepsilon t}\left[\mathrm{C_1}\cos\tilde{\Omega}\mathrm{t} + \mathrm{C_2}\,\mathrm{sen}\,\tilde{\Omega}\mathrm{t}\right] = \mathrm{A}\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\left[\cos\left(\tilde{\Omega}\mathrm{t} + \theta\right)\right]$$

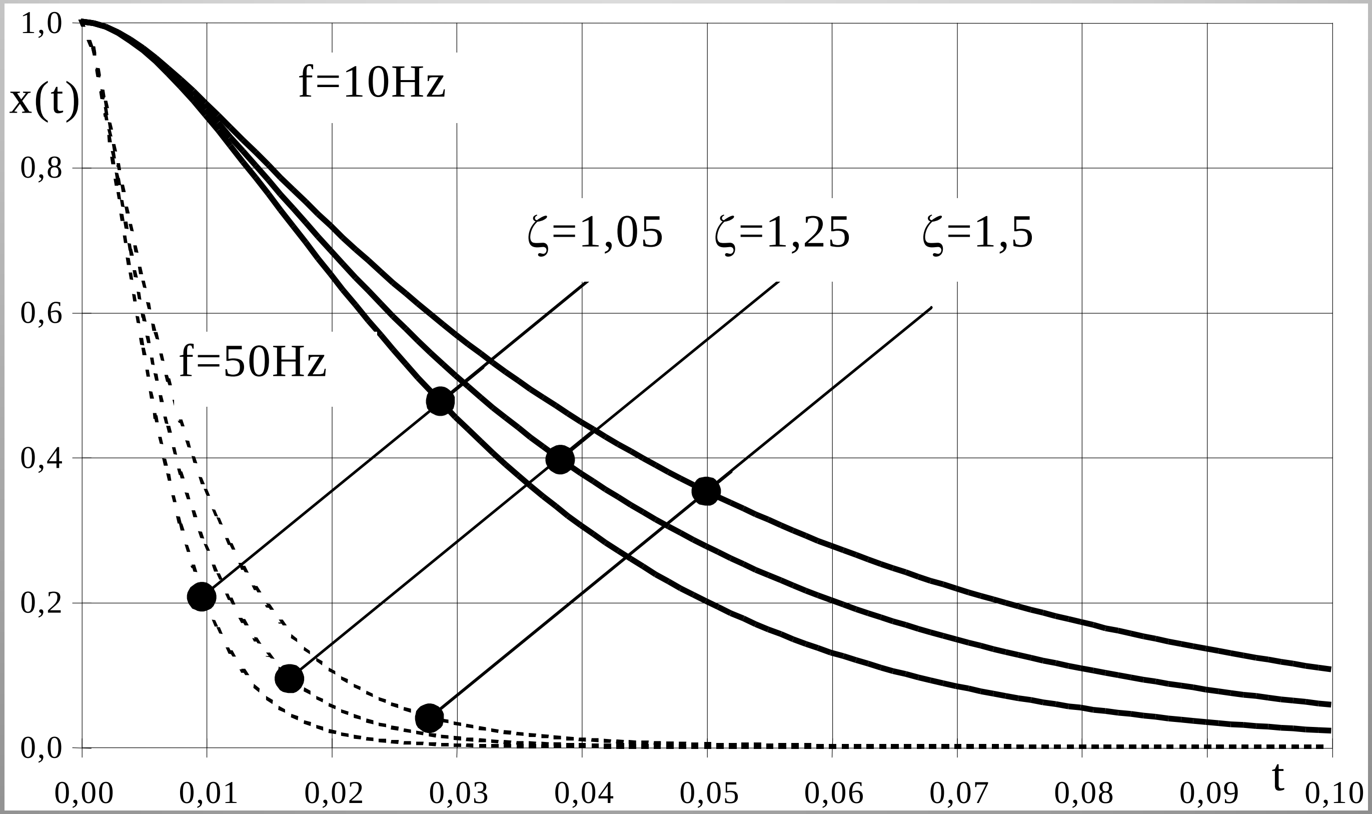
$$\tilde{\mathrm{T}} = \frac{2\pi}{\tilde{\Omega}}$$



3)– Se ε>ω: *sovra-smorzato*

$$p_{1,2} = -\varepsilon \pm \tilde{\Omega} \quad dove \quad \tilde{\Omega} = \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2} = \omega\sqrt{\zeta^2 - 1} > 0$$

$$x(t) = e^{-\varepsilon t}\left[c_1 e^{\tilde{\Omega} t} + c_2 e^{-\tilde{\Omega} t}\right] = e^{-\varepsilon t}\left[C_1 \cosh \tilde{\Omega} t + C_2 \,\mathrm{senh}\, \tilde{\Omega} t\right]$$



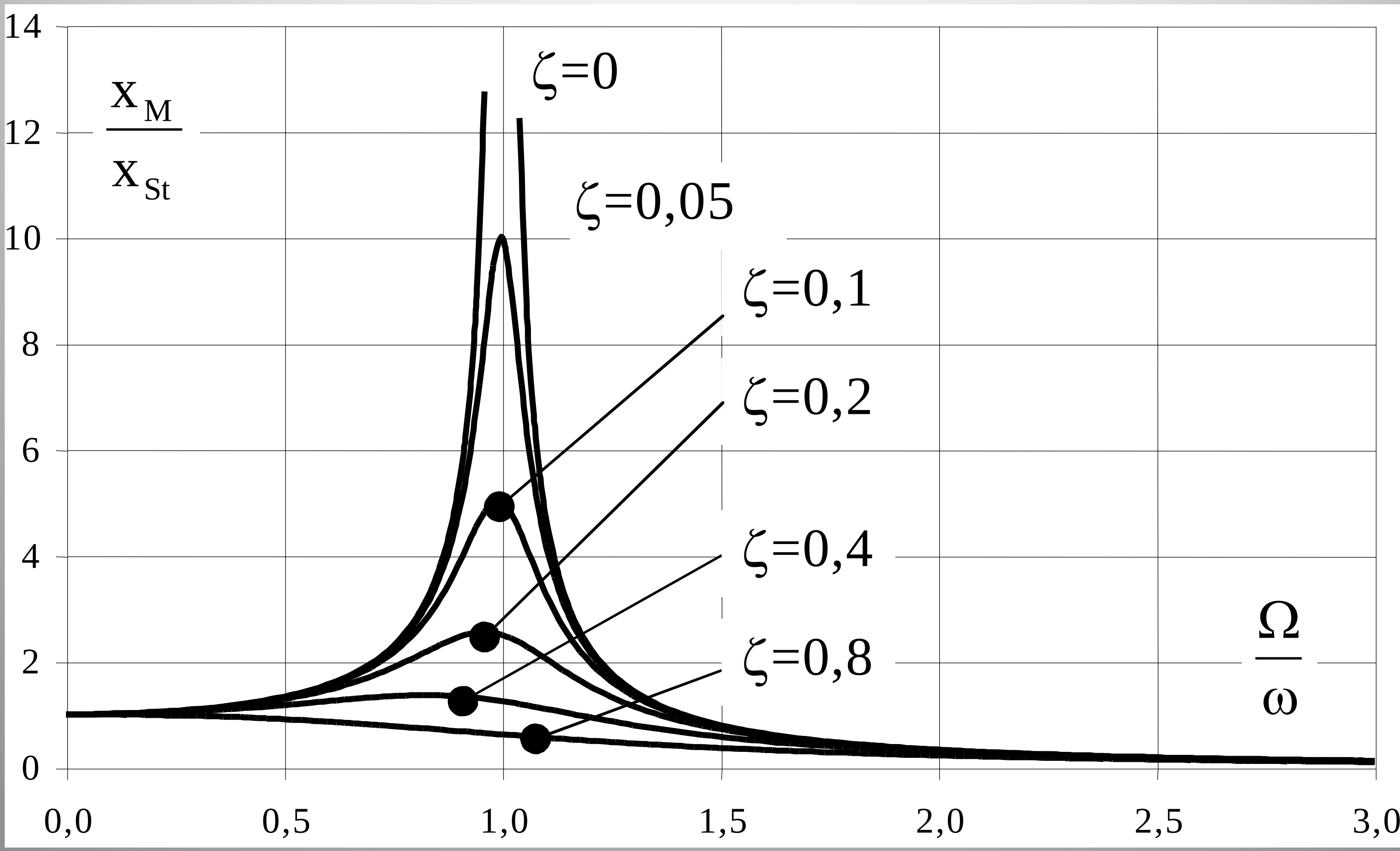
Sistema dissipativo: Vibr. forzate

$$m\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = P_0 \mathrm{sen}\Omega t \Rightarrow \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega^2 x = P\mathrm{sen}\Omega t \; ; \; P = \frac{P_0}{m}$$

$$x_p(t) = \frac{P_0 / K}{\sqrt{[1-(\Omega/\omega)^2]^2 + 4\zeta^2(\Omega/\omega)^2}} \mathrm{sen}(\Omega t - \theta)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\zeta(\Omega/\omega)}{1-(\Omega/\omega)^2}$$

Sistema dissipativo: Vibr. forzate



N Gradi di Libertà:Vibrazioni libere

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad\Rightarrow\quad T=\frac{1}{2}\{\dot{Q}\}^T[M]\{\dot{Q}\}$$

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}k_{ij}q_i q_j \quad\Rightarrow\quad U=\frac{1}{2}\{Q\}^T[K]\{Q\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_n}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}=\sum_{j=1}^{N}k_{nj}q_n+\sum_{j=1}^{N}m_{nj}\ddot{q}_n=0 \quad ; \quad n=1,2,\dots,N$$

$$\boxed{[K]\{Q\}+[M]\{\ddot{Q}\}=0}$$

$$\{Q\}=\{Y\}e^{j\omega t}$$

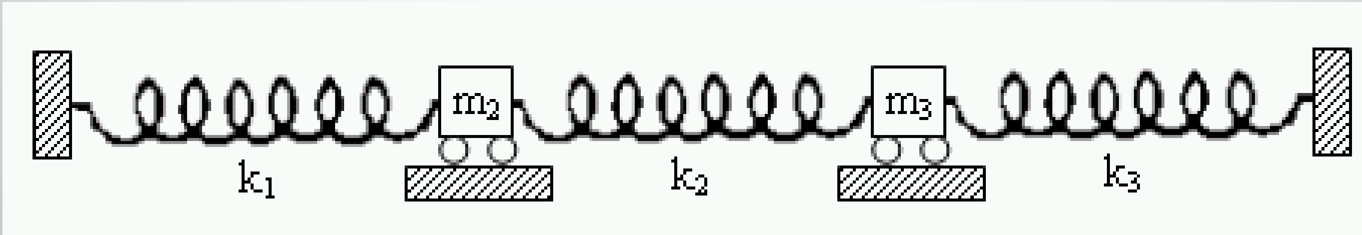
Problema agli autovalori

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{Y\}=0$$

Soluzione non banale

$$\boxed{\left|[K]-\omega^2[M]\right|=0}$$

N Gradi di Libertà:Esempio



$$\mathsf{T} = \frac{1}{2} m_2 \dot{u}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{u}_3^2$$

$$\mathsf{U} = \frac{1}{2} k_1 u_2^2 + \frac{1}{2} k_2 (u_3 - u_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 u_3^2$$

$$L(u, \dot{u}) = \mathsf{T} - \mathsf{U} = \frac{1}{2} m_2 \dot{u}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{u}_3^2 - \frac{1}{2} k_1 u_2^2 - \frac{1}{2} k_2 (u_3 - u_2)^2 - \frac{1}{2} k_3 u_3^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} - \frac{\partial L}{\partial u_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_2 \ddot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_2 - k_2 u_3 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_3} - \frac{\partial L}{\partial u_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_3 \ddot{u}_3 - k_2 u_2 + (k_2 + k_3) u_3 = 0$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} = 0}$$

N Gradi di Libertà: Vibrazioni libere

Ad ogni valore *caratteristico* ω_n^2 corrisponde una soluzione *caratteristica* (o *autovettore*) $\{Y\}_n$ del sistema:

$$\boxed{\left(\left[K\right]-\omega_n^2\left[M\right]\right)\left\{Y\right\}_n = 0}$$

Soluzione nel tempo: $\{Y\}_n \left(a_n \cos\omega_n t + b_n \operatorname{sen}\omega_n t\right)$

l'integrale generale è dato dalla combinazione lineare di tali soluzioni:

$$\boxed{\{Q\} = \sum_{n=1}^{N} \{Y\}_n \left(a_n \cos\omega_n t + b_n \operatorname{sen}\omega_n t\right) = \sum_{n=1}^{N} \{Y\}_n \left(\operatorname{sen}\omega_n t + \theta_n\right)}$$

Gli autovettori $\{Y\}_n$ costituiscono una base di vettori ortogonali

Esempio $k_1=k_2=k$; $m_1=m_2=m$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 2k_1 & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} = 0}$$

$$u_2 = u_2^0 e^{j\omega t} \quad ; \quad u_3 = u_3^0 e^{j\omega t}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 2k-\omega^2 m \end{vmatrix} = m^2\omega^4 - 4mk\omega^2 + 3k^2 = 0}$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{2mk \pm \sqrt{4m^2k^2 - 3m^2k^2}}{m^2} = \begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{k}{m} \\ \omega_2^2 = \dfrac{3k}{m} \end{cases}$$

Esempio $k_1=k_2=k$; $m_1=m_2=m$

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{k}{m} \quad \Rightarrow \{U\}_1 = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{primo autovettore} \\ \omega_2^2 = \dfrac{3k}{m} \quad \Rightarrow \{U\}_2 = c_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \text{secondo autovettore} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} u_2 = c_1[\alpha\cos\omega_1 t + \beta \,\mathrm{sen}\,\omega_1 t] + c_2[\gamma\cos\omega_2 t + \delta\,\mathrm{sen}\,\omega_2 t] \\ u_3 = c_1[\alpha\cos\omega_1 t + \beta \,\mathrm{sen}\,\omega_1 t] - c_2[\gamma\cos\omega_2 t + \delta\,\mathrm{sen}\,\omega_2 t] \end{cases}}$$

Le costanti a,b,c,d si possono trovare quando sono note le condizioni iniziali

$$\boxed{\begin{cases} u_2 = [a\cos\omega_1 t + b\,\mathrm{sen}\,\omega_1 t] + [c\cos\omega_2 t + d\,\mathrm{sen}\,\omega_2 t] \\ u_3 = [a\cos\omega_1 t + b\,\mathrm{sen}\,\omega_1 t] - [c\cos\omega_2 t + d\,\mathrm{sen}\,\omega_2 t] \end{cases}}$$

N Gradi di Libertà:Vibrazioni libere

$$\boxed{\left|[K]-\omega^2[M]\right| = 0}$$

Problema di autovalori generalizzato

sviluppando si ha un polinomio di ordine N in ω^2 (ovvero 2N in ω).
Da tale polinomio, detto *polinomio caratteristico*, si hanno N *valori caratteristici* ω^2 (o autovalori) (**non necessariamente di molteplicità uno**).
Ad ogni valore *caratteristico* ω^2 corrisponde una soluzione *caratteristica* (o ***autovettore***) $\{Y\}_n$ definita a meno di una costante moltiplicativa.
Le proprietà [K], [M] (simmetriche, definite positive) garantiscono poi:
a)–che gli autovalori risultano reali, per cui ad ogni ω^2 corrisponde due numeri reali $\pm\omega$.
b)–che è sempre possibile (indipendentemente dalla molteplicità dell'autovalore) trovare N autovettori $\{Y\}_n$ linearmente indipendenti, definiti a meno di una costante moltiplicativa.
c)–che la matrice [Y] degli N autovettori $\{Y\}_n$ gode della seguente proprietà di ortogonalità:

$$\boxed{\langle K^*\rangle = [Y]^T[K][Y] \quad ; \quad \langle M^*\rangle = [Y]^T[M]\ [Y]}$$

Matrici diagonali

Dinamica libera delle vibrazioni assiali della trave

$$\boxed{AE\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0}$$

$$u(x,t) = T(t)X(x)$$

$$-\frac{AE}{\mu}\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \text{costante} = \omega^2$$

$$\boxed{\begin{gathered}\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \\ \frac{AE}{\mu}X'' + \omega^2 X = 0 \quad \Rightarrow \quad X'' + \lambda^2 X = 0\end{gathered}}$$

$$\boxed{T(t) = a\cos\omega t + b\,\text{sen}\,\omega t}$$

$$\boxed{X(x) = c_1\cos\lambda x + c_2\,\text{sen}\,\lambda x}$$

Il parametro λ (legato alla pulsazione ω) non è noto.

$$\boxed{\lambda^2 = \frac{\mu\omega^2}{AE}}$$

Nello studio della dinamica libera le condizioni agli estremi sono omogenee; quindi occorre trovare le soluzioni non banali di un sistema omogeneo dove λ assume il significato di valore caratteristico.

Sistema omogeneo nelle incognite c_1,c_2 ottenuto imponendo le condizioni agli estremi alla X(x).

$$\boxed{[A(\lambda)]\{C\} = 0}$$

Problema di autovalori

$$\left[A(\lambda)\right]\left\{C\right\} = 0 \qquad \lambda^2 = \frac{\mu\omega^2}{AE}$$

Per ogni n-esimo valore di λ_n per cui $\left|A(\lambda)\right| = 0$, si trova una soluzione non banale c_1, c_2; di tali due costanti solo una può essere determinata quindi la soluzione **$X_n(x)=c_1 \cos \lambda_n x + c_1 \cos \lambda_n x$** è nota a meno di una costante.

Il parametro **λ_n**, che in termini matematici è un **autovalore**, nel caso presente è **sinonimo** di pulsazione **ω_n**; la corrisponde soluzione **$\{X\}_n$**, che in termini matematici è un'**autofunzione**, rappresenta la "forma" lungo x secondo cui la struttura vibra ed è detta ***modo***.

Non si confonda il modo con la deformata conseguente all'applicazione di un carico p_x, ; infatti:

– *la deformata* è soluzione di un problema non omogeneo che indica "forma" e "valore univoco" dello spostamento;

– il modo indica solo "forma" mentre il valore è definito a meno di una costante.

I modi di vibrazione di un continuo godono della proprietà di ortogonalità:

$$\int_0^L \mu X_n X_m = 0 \quad \text{per} \quad m \neq n \quad ; \quad \int_0^L \mu X_n X_m \neq 0 \quad \text{per} \quad m = n$$

Dinamica libera delle vibrazioni flessionali della trave

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+\mu\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}=0$$

$$w(x,t)=X(x)e^{j\omega t}$$

$$X^{IV}-\lambda^4 X=0 \quad ; \quad \text{con} \quad \lambda^4=\frac{\rho A L^4\omega^2}{EI} \; ; \; \xi=\frac{x}{L} \; ; \; []'=\frac{d}{d\xi}$$

$$w=c_1\,\text{sen}\,\lambda\xi+c_2\cos\lambda\xi+c_3\,\text{senh}\,\lambda\xi+c_4\cosh\lambda\xi$$

$$+$$

Condizioni agli estremi omogenee

$$=$$

$$[A(\lambda)]\{C\}=0$$

Sostituendo nella soluzione

$$w(x,t) = \left[A\cos(\gamma x) + B\sin(\gamma x) + Ch(\gamma x) + DSh(\gamma x)\right]$$

le due condizioni per l'estremo di sinistra x=0 si ottiene:

$$\left.\begin{array}{l} A + C = 0 \\ A - C = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

Trave appoggiata su entrambi gli estremi

Sostituendo invece le due condizioni per l'estremo di destra x=L e tenendo conto che A e C sono nulli,

$$\left.\begin{array}{r} B\sin(\gamma L) + DSh(\gamma L) = 0 \\ -B\sin(\gamma L) + DSh(\gamma L) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ B\sin(\gamma L) = 0 \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{L}$$

L'ultima delle quattro condizioni:

$$B\sin(\gamma L) = 0$$

Ammette la soluzione "banale" A=B=C=D=0, oppure la condizione:

$$\sin(\gamma L) = 0 \;\Rightarrow\; \gamma L = k\pi \;;\quad \gamma = \frac{k\pi}{L}$$

In corrispondenza di ciascuna k-esima pulsazione propria ω_k la vibrazione flessionale della trave è definita dalla funzione:

$$w_k(x,t) = \underbrace{B_k \sin(\tfrac{k\pi}{L} x)}_{\alpha_k(x)} \underbrace{\cos(\omega_k t + \phi_k)}_{\beta_k(t)}$$

La funzione dello spazio α_k, che descrive la forma spaziale del moto, viene detta **modo di vibrare** associato alla pulsazione propria ω_k. Per il caso considerato, tutti i modi di vibrare sono sinusoidi (

(

$$\omega_k = \gamma_k^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

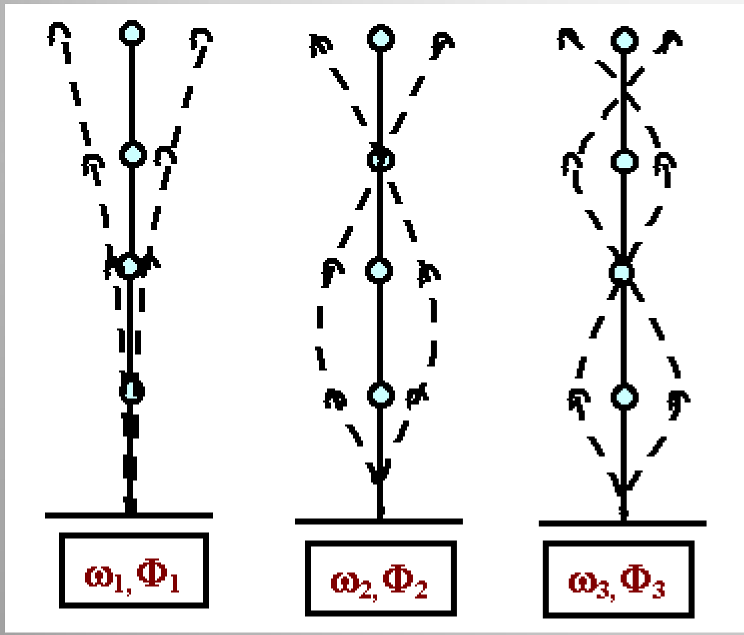
Il più generale moto libero stazionario della trave vincolata con doppio appoggio alle estremità è rappresentato dalla combinazione lineare di tutti i moti elementari precedentemente ricavati:

$$w(x,t) = \sum_k w_k(x,t) = \sum_k \underbrace{B_k \sin(\tfrac{k\pi}{L} x)}_{\alpha_k(x)} \underbrace{\cos(\omega_k t + \phi_k)}_{\beta_k(t)}$$

In cui i coefficienti B_k e ϕ_k possono essere determinati imponendo le condizioni iniziali ossia il valore della posizione e della velocità di tutte le sezioni della trave nell'istante t=0:

$$w(x,0) = w_0(x) \; ; \; \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_0 = \dot{w}_0(x)$$

Modi trave incastro libera



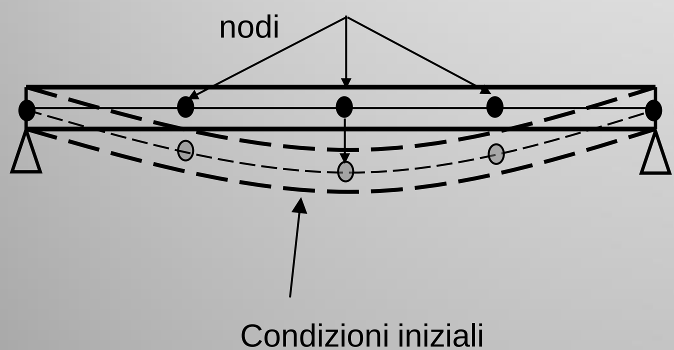
Modi trave appoggiata

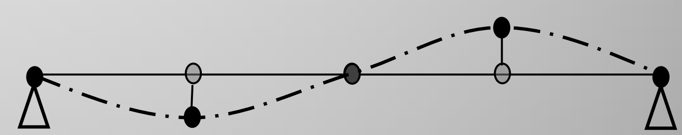
Modi membrana circolare

Modi e frequenze flessionali della trave

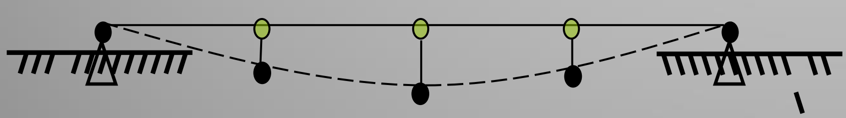
Tipo di Vincolo	λ_n	Modo
Incastro-Libera	1,875 ; 4,694 7,855 ; 10,996	$C_n^\xi - c_n^\xi - B_n(S_n^\xi - s_n^\xi)$
Incastro-Glifo	2,365 ; 5,498 8,639 ; 11,781	$C_n^\xi - c_n^\xi - B_n(S_n^\xi - s_n^\xi)$
Incastro-Appoggio	3,927 ; 7,069 10,210 ; 13,352	$C_n^\xi - c_n^\xi - A_n(S_n^\xi - s_n^\xi)$
Incastro-Incastro	4,730 ; 7,853 10,996 ; 14,137	$C_n^\xi - c_n^\xi - A_n(S_n^\xi - s_n^\xi)$
Appoggio-Appoggio	$n\pi$	$\text{sen}\, n\pi\xi$
Libera-Libera	4,730 ; 7,853 10,996 ; 14,137	$C_n^\xi + c_n^\xi - A_n(S_n^\xi + s_n^\xi)$
Glifo-Appoggio	$\frac{(2n-1)\pi}{2}$	$\cos\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}$
Libera-Appoggio	3,927 ; 7,069 10,210 ; 13,352	$C_n^\xi + c_n^\xi - A_n(S_n^\xi + s_n^\xi)$
Libera-Glifo	2,365 ; 5,498 8,639 ; 11,781	$C_n^\xi + c_n^\xi - B_n(S_n^\xi + s_n^\xi)$
Glifo-Glifo	$n\pi$	$\cos n\pi\xi$

Gli autovalori sono le frequenze con le quali la trave può vibrare anche se non c'è forzante; gli autovettori sono le deformate che la trave assume in corrispondenza di ogni frequenza naturale.
Se la trave vibra alla frequenza naturale ω_i, la corrispondente deformata è necessariamente proporzionale all'autovettore (la 'forma' della deformata della trave non cambia nel tempo). In generale la legge di moto di un corpo libero contiene tutte e solo le frequenze naturali e la deformata è costituita da una combinazione lineare dei modi propri del sistema

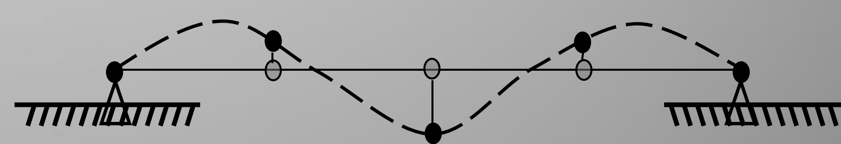




II modo flessionale ω_2



I modo flessionale ω_1



III modo flessionale ω_3

Dinamica libera delle vibrazioni flessionali della piastra appoggiata

$$\nabla^4 W(x,y) - \lambda^4 W(x,y) = 0 \quad ; \quad \text{con } \lambda^4 = \frac{\mu\omega^2}{D}$$

$$x = 0 \begin{cases} W = 0 \\ M_x = 0 \end{cases} \quad ; \quad x = a \begin{cases} W = 0 \\ M_x = 0 \end{cases}$$

$$y = 0 \begin{cases} W = 0 \\ M_y = 0 \end{cases} \quad ; \quad x = b \begin{cases} W = 0 \\ M_x = 0 \end{cases}$$

$$W(x,y) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} a_{mn} \,\text{sen}\, \frac{m\pi x}{a} \,\text{sen}\, \frac{n\pi y}{b}$$

$$\lambda^4_{mn} = \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2$$

$$\omega_{mn} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\mu}} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]$$