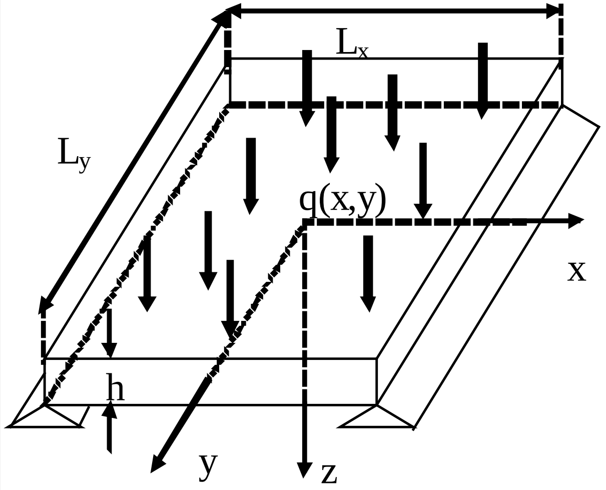
COSTRUZIONI AEROSPAZIALI

Teoria della Piastra e Metodi Approssimati

Teoria classica della Piastra



Ipotesi

1. Il materiale è omogeneo, isotropo e a comportamento elastico lineare.

2. La struttura è piana ed a sezione costante.

3. Le forze esterne q(x,y), per unità di superficie, agiscono in direzione z.

4. Lo spostamento *w* è tale che w/h < 1: $w_{Max} < h/5$, ovvero $w_{Max} < L/50$.

Una tale ipotesi consente di considerare le coordinate del corpo deformato coincidenti con quelle del corpo indeformato.

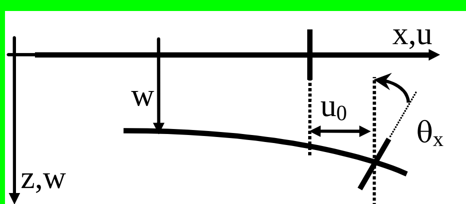
5. Che le rotazioni della superficie media risulti piccola: ovvero $\theta \ll 1$.

6. Che sforzi e deformazioni dovute ai carichi assiali siano di un ordine di grandezza trascurabile rispetto a quelli indotti dalla flessione.

Trave

$$u(x,z) = \sum_{m=0}^{M} z^m u_m(x)$$
$$v(x,z) = 0$$
$$w(x,z) = \sum_{n=0}^{N} z^n w_n(x)$$

$$\begin{cases} u(x,z) = u_0(x) + z u_1(x) \\ v(x,z) = 0 \\ w(x,z) = w_0(x) + z w_1(x) \end{cases}$$

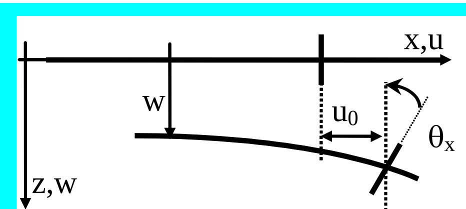


$$\begin{cases} u(x,z) = u_0(x) + z\theta(x) \\ v(x,z) = 0 \\ w(x,z) = w_0(x) \end{cases}$$

Piastra

$$\begin{cases} u(x,y,z) = \sum_{m=0}^{M} z^m u_m(x,y) \\ v(x,y,z) = \sum_{m=0}^{M} z^m v_m(x,y) \\ w(x,y,z) = \sum_{n=0}^{N} z^n w_n(x,y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u_0(x,y) + z u_1(x,y) \\ v(x,y,z) = v_0(x,y) + z v_1(x,y) \\ w(x,y,z) = w_0(x,y) + z w_1(x,y) \end{cases}$$



$$\begin{cases} u(x,y,z) = u_0(x,y) + z\theta_x(x,y) \\ v(x,y,z) = v_0(x,y) + z\theta_y(x,y) \\ w(x,y,z) = w_0(x,y) \end{cases}$$

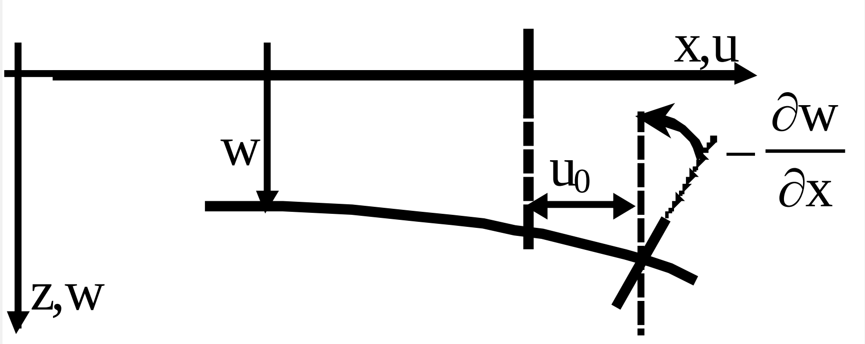
sezioni inizialmente piane *ed ortogonali al piano medio rimangano* piane, M=N=1:

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u_0(x,y) + z\theta_x(x,y) \\ v(x,y,z) = v_0(x,y) + z\theta_y(x,y) \\ w(x,y,z) = w_0(x,y) + zw_1(x,y) \end{cases}$$

sezioni inizialmente piane ed ortogonali *al piano medio rimangano* ortogonali *alla linea media,* $\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$:

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \dfrac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_x = -\dfrac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + \dfrac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_y = -\dfrac{\partial w_0}{\partial y} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} u(x,y,z) = u_0(x,y) - z\dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} \\ v(x,y,z) = v_0(x,y) - z\dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} \\ w(x,y,z) = w_0(x,y) \end{cases}}$$



Relazioni cinematiche

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{xx}(x,y,z) = \dfrac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} - z\dfrac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} \\
\varepsilon_{yy}(x,y,z) = \dfrac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} - z\dfrac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} \\
\gamma_{xy}(x,y,z) = \left(\dfrac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0(x,y)}{\partial x}\right) - 2z\dfrac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0
\end{cases}
$$

Legami costitutivi

$$
\begin{cases}
\sigma_{xx} = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right] = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial v_0}{\partial y}\right) - z\left(\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)\right] \\
\sigma_{yy} = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right] = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[\left(\dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \nu\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\right) - z\left(\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\right] \\
\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left[\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x}\right) - 2z\left(\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)\right]
\end{cases}
$$

$$
\boxed{\sigma_{xx} = \sigma_{xx0} - z\sigma_{xx1} \quad ; \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy0} - z\sigma_{yy1} \quad ; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy0} - z\tau_{xy1}}
$$

Forze

Integrando le σ,τ sullo spessore *h*, si hanno le forze *per unità di lunghezza*:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx0} - z\sigma_{xx1}) dz = h\sigma_{xx0}$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz = h\sigma_{yy0} \quad ; \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = h\tau_{xy0}$$

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad ; \quad T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz$$

$$\boxed{\begin{cases} N_x = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}\left[\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial v_0}{\partial y}\right)\right] \\ N_y = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}\left[\left(\dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \dfrac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right] \\ N_{xy} = Gh\left[\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right] \end{cases}}$$

N/m

Momenti

Integrando le $z\sigma$, $z\tau$ in *h*, si hanno i momenti per unità di lunghezza:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx} dz = \int_{-h/2}^{h/2} z(\sigma_{xx0} - z\sigma_{xx1}) dz = -\frac{h^3}{12}\sigma_{xx1}$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{yy} dz \quad ; \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{xy} dz = M_{yx}$$

$$\begin{cases} M_x = -D\left(\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) \\ M_y = -D\left(\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} = -(1-\nu) D \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

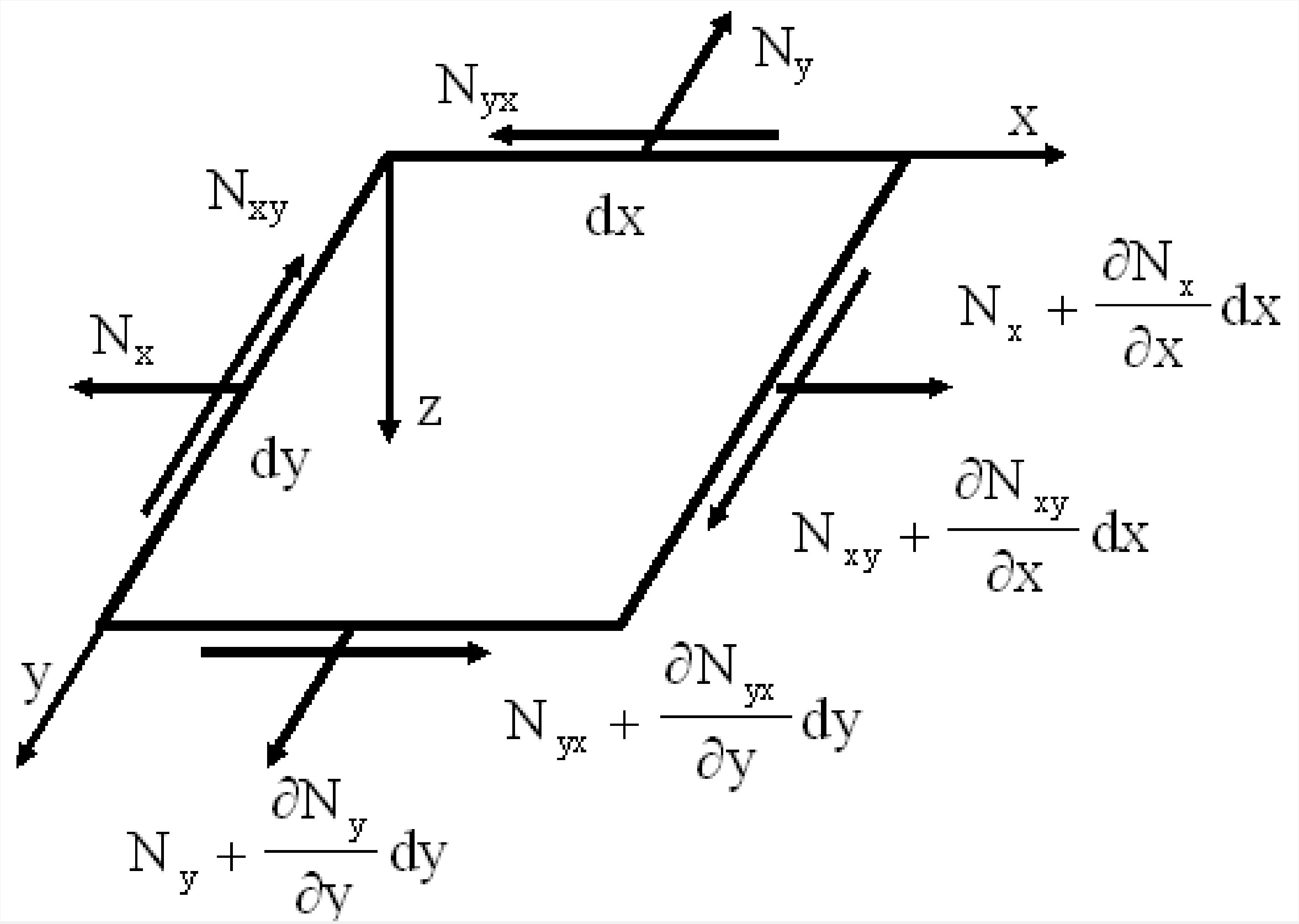
N

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

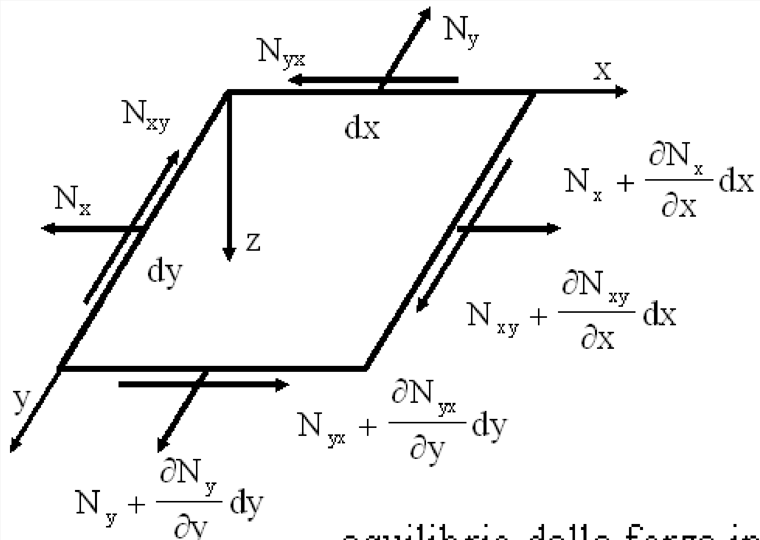
Nm

Elemento rappresentativo della piastra

a)–piastra tirata



Equazioni di equilibrio: piastra tirata



– equilibrio delle forze in direzione x:

$$(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx) dy - N_x dy + (N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy) dx - N_{xy} dx + p_x dx dy = 0$$

ovvero:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x = 0$$

– equilibrio delle forze in direzione y:

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + p_y = 0$$

– equilibrio dei momenti intorno all'asse z:

$$N_{xy} = N_{yx}$$

In definitiva si hanno due equazioni di equilibrio nelle tre incognite N_x,N_y, N_{xy}=N_{yx}

Equazioni piastra tirata

Alle due precedenti equazioni di equilibrio vanno associate le:

$$\begin{cases} N_x = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial v_0}{\partial y}\right) \\ N_y = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial v_0}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial u_0}{\partial y}\right) \end{cases} \quad ; \quad N_{xy} = Gh\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x}\right)$$

per avere in definitiva un sistema di cinque equazioni nelle cinque incognite $N_x, N_y, N_{xy}, u_0, v_0$.

Il sistema può essere risolto per risalita impiegando il metodo degli spostamenti o il metodo delle forze.

a)–Metodo degli spostamenti

Sostituendo le N espresse in termini di u nelle equazioni di equilibrio:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}=-p_x\frac{1-\nu^2}{Eh}$$

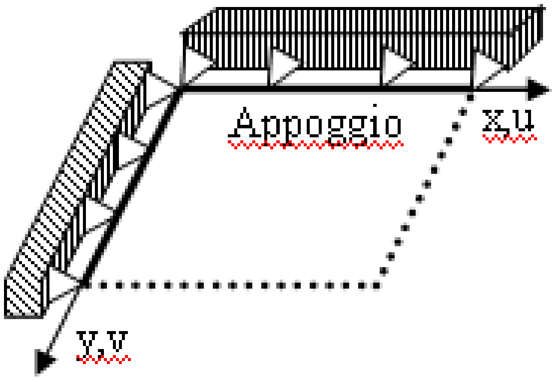
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-p_y\frac{1-\nu^2}{Eh}$$

a cui vanno associate due condizioni sul contorno espresse in termini di spostamenti u,v. In particolare per piastra rettangolare:

1. Appoggio semplice: spostamenti u,v impediti:

$$\begin{cases}(u)_{\substack{x=0\\x=a}}=0\\(v)_{\substack{x=0\\x=a}}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(u)_{\substack{y=0\\y=b}}=0\\(v)_{\substack{y=0\\y=b}}=0\end{cases}$$



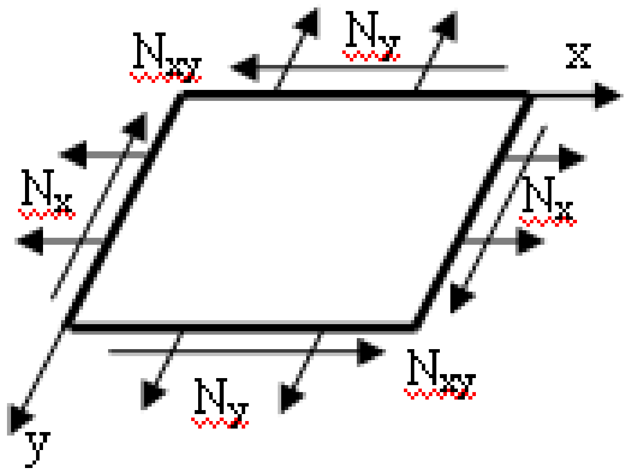
Condizioni al contorno: libera

2. Libera nel senso che sono consentiti gli spostamenti nel piano.

2a)−condizioni omogenee, non ci sono forze applicate[1]:

$$(N_x)_{\substack{x=0\\x=a}} = (N_{xy})_{\substack{x=0\\x=a}} = 0$$

$$(N_y)_{\substack{y=0\\y=b}} = (N_{xy})_{\substack{y=0\\y=b}} = 0$$



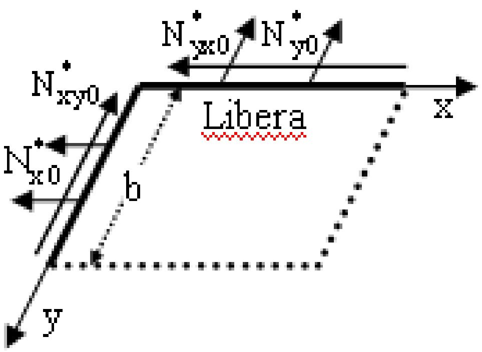
che, ricordando le (4.3), possono espresse in termini di spostamenti; in particolare le prime due si scrivono:

$$\begin{cases} \dfrac{Eh}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\nu\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\x=a}} = 0 \\[2ex] Gh\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\x=a}} = 0 \end{cases}$$

Condizioni al contorno: libera

2b)–condizioni non omogenee, sono presenti forze esterne (con *):

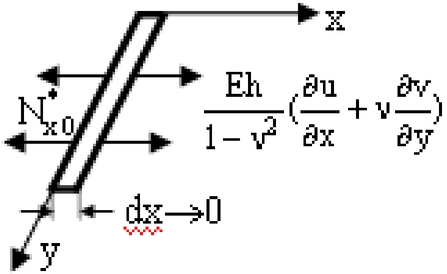
$$\begin{cases} \dfrac{Eh}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\nu\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\x=a}} = \begin{matrix} N^*_{x0}(y) \\ N^*_{xa}(y) \end{matrix} \\ Gh\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\x=a}} = \begin{matrix} N^*_{xy0}(y) \\ N^*_{xya}(y) \end{matrix} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dfrac{Eh}{1-\nu^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\nu\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{\substack{y=0\\y=b}} = \begin{matrix} N^*_{y0}(x) \\ N^*_{yb}(x) \end{matrix} \\ Gh\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_{\substack{y=0\\y=b}} = \begin{matrix} N^*_{xy0}(x) \\ N^*_{xyb}(x) \end{matrix} \end{cases}$$

Nota. Queste equazioni possono essere interpretate come equazioni di equilibrio sul contorno tra le forze elastiche (a primo membro) e le forze applicate (a secondo membro); infatti, con riferimento alla figura, l'equazione di equilibrio dell'elemento b, dx del contorno considerato "corpo libero" si scrive:

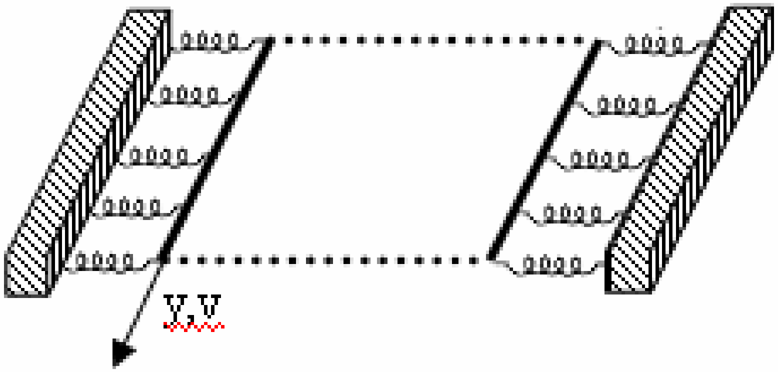
$$\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x=0} - N^*_{x0}(y) = 0$$



Condizioni al contorno: vincolo elastico

3a)–condizioni omogenee, non ci sono forze applicate di valore assegnato.

Le molle esplicano una forza orizzontale per unità di lunghezza di intensità ku che, assunto per u lo stesso verso di x, è di richiamo sul lato x=0 e di spinta sul lato x=a, quindi:



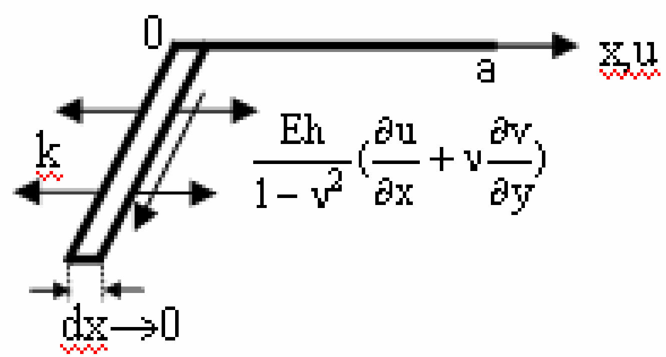
$$(*)\qquad \begin{cases} (N_x)_{\substack{x=0\\x=a}} = \pm k u_{\substack{x=0\\x=a}} \\ (N_{xy})_{\substack{x=0\\x=a}} = 0 \end{cases}$$

dove + vale per x=0 e – per x=a.

Le (*) in termini di spostamenti si scrivono:

$$\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\x=a}} \mp k u_{\substack{x=0\\x=a}} = 0$$

$$Gh\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\x=a}} = 0$$



Condizioni al contorno: vincolo elastico

3b)–condizioni non omogenee, sono presenti forze applicate.

$$\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\x=a}} \mp k u_{\substack{x=0\\x=a}} = \begin{matrix} N^*_{x0}(y) \\ N^*_{xa}(y) \end{matrix}$$

$$Gh\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\x=a}} = \begin{matrix} N^*_{xy0}(y) \\ N^*_{xya}(y) \end{matrix}$$

Metodo delle Forze

Le due equazioni di equilibrio non sono sufficienti a calcolare le tre forze incognite e si ricorre all'equazione di compatibilità

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}$$

Che, ricordando:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right] \\ \sigma_{yy} = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right] \\ \tau_{xy} = \dfrac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right] \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right] \\ \gamma_{xy} = \dfrac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{cases}$$

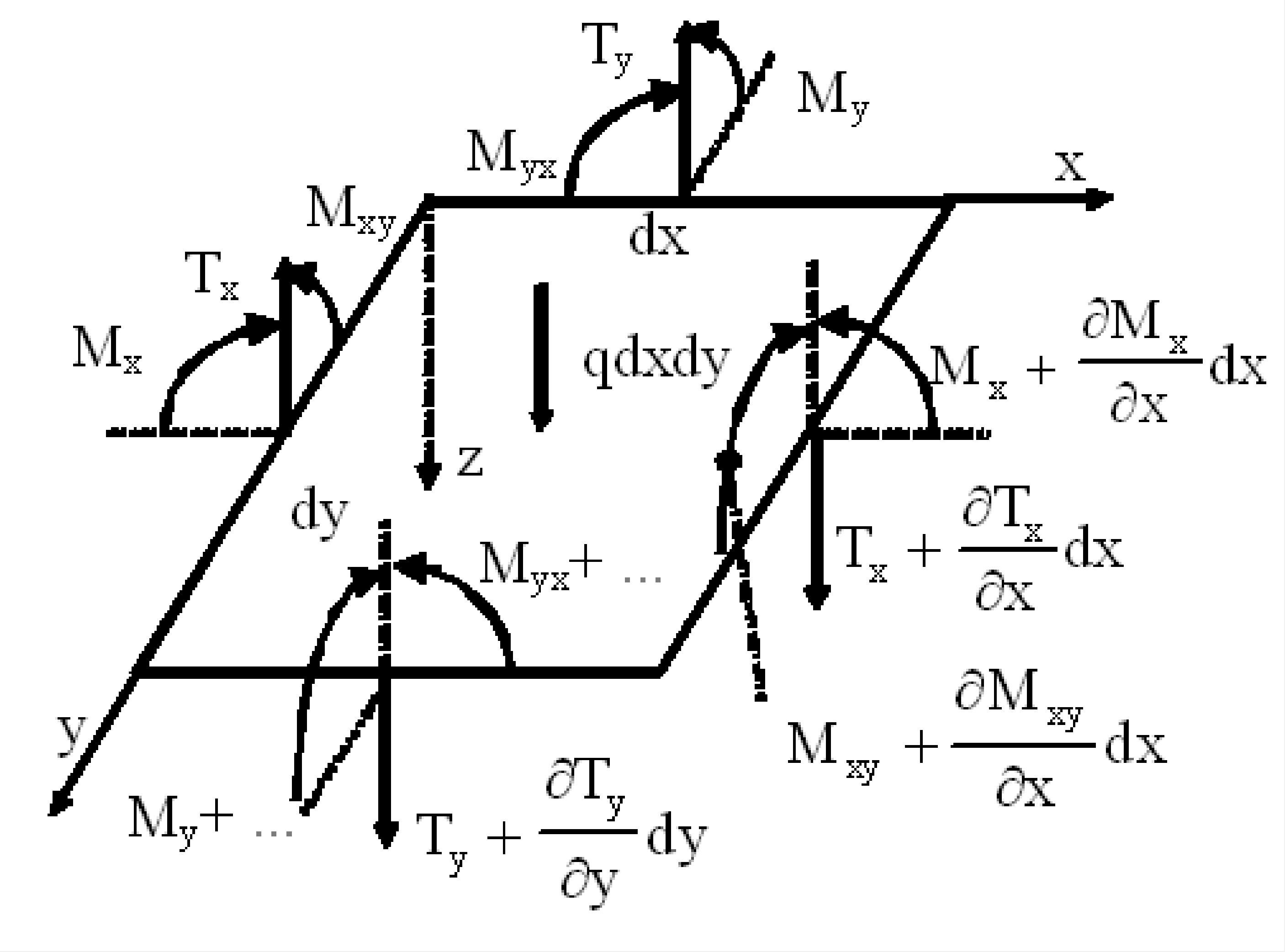
in termini di forze, si scrive:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(N_x + N_y) = -(1+\nu)\left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y}\right)$$

che insieme alle equaz. di equilibrio costituisce un sistema di tre equazioni nelle tre incognite N_x, N_y, N_{xy} a cui vanno associate le relative condizioni al contorno, del tipo precedentemente esaminato, espresse in termini di forze.

Elemento rappresentativo della piastra

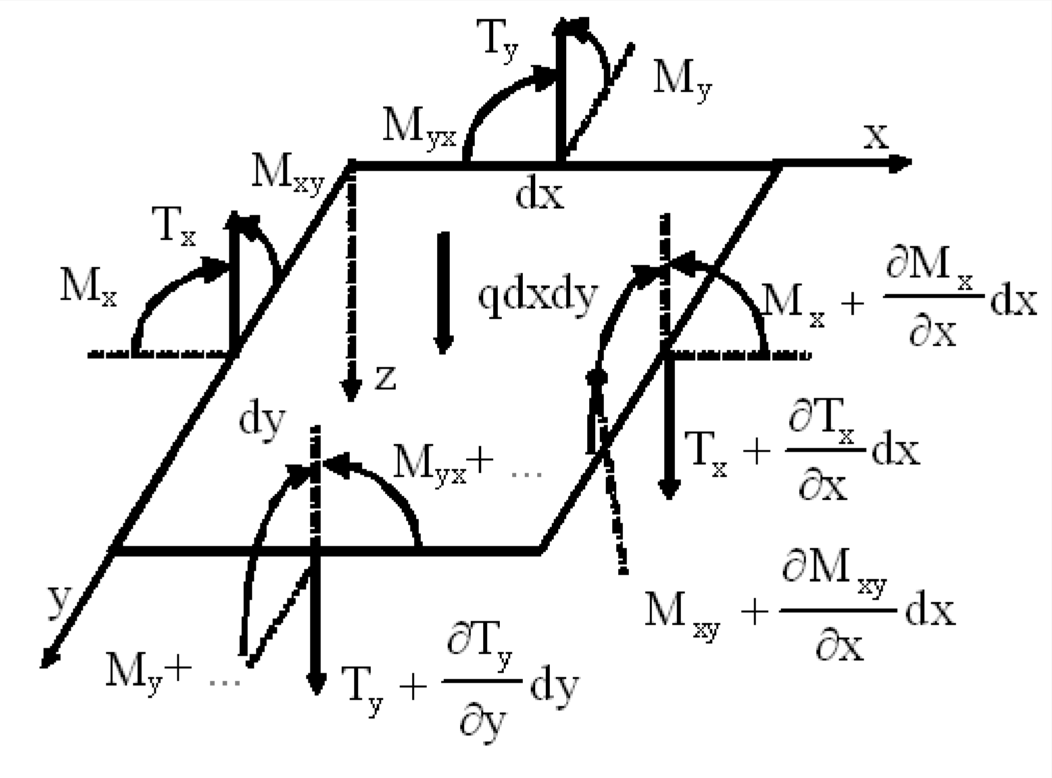
b)–piastra inflessa



La piastra inflessa

1.Equilibrio M intorno ad y

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}dxdy+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}dydx-\left(T_x+\frac{\partial T_x}{\partial x}dx\right)dydx-qdxdy\frac{dx}{2}=0$$



$$\boxed{\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}=T_x}$$

2.Equilibrio M intorno ad x

$$\boxed{\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=T_y}$$

3.Equilibrio M intorno a z

$$\boxed{N_{xy}=N_{yx}}$$

4.Equilibrio F lungo z

$$T_xdy-\left(T_x+\frac{\partial T_x}{\partial x}dx\right)dy+T_ydy-\left(T_y+\frac{\partial T_y}{\partial y}dy\right)dx+qdxdy=0$$

$$\boxed{\frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial T_y}{\partial y}=-q}$$

Metodo degli spostamenti

$$\boxed{(1)\quad \frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}=T_x}\qquad \boxed{(2)\quad \frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=T_y}\qquad \boxed{(4)\quad \frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial T_y}{\partial y}=-q}$$

Sono 3 equazioni in 5 incognite: M_x, M_y, M_{xy}, T_x, T_y

$$\frac{\partial (1)}{\partial x}+\frac{\partial (2)}{\partial y}\quad \Rightarrow \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=\frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial T_y}{\partial y}$$

Utilizzando la (4)

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=-q$$

Esprimendo i momenti in termini delle curvature:

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\ ;\ M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\ ;\ M_{xy}=-(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Si ha: $\boxed{D\nabla^4 w=q}$

con $\nabla^4=\nabla^2\nabla^2=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$

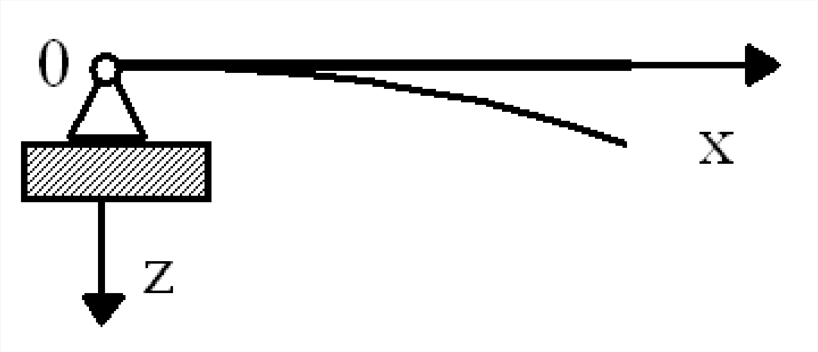
Tipiche Condizioni al contorno

1.Incastro: w=θ=0

$$w(0) = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$$

2.Appoggio (con cerniera):
w=M=0

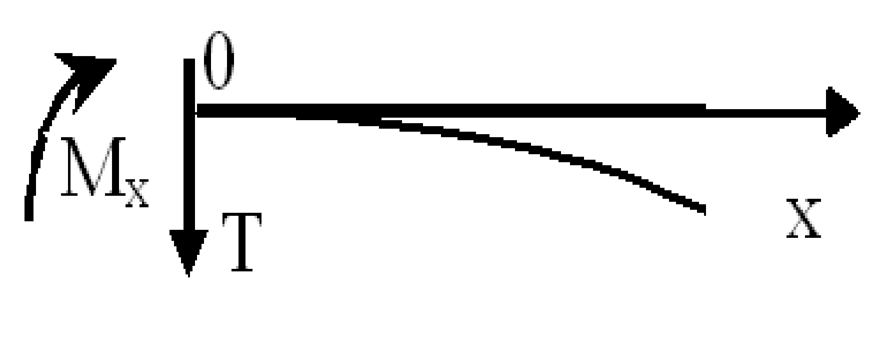
$$w(0) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0} = 0$$

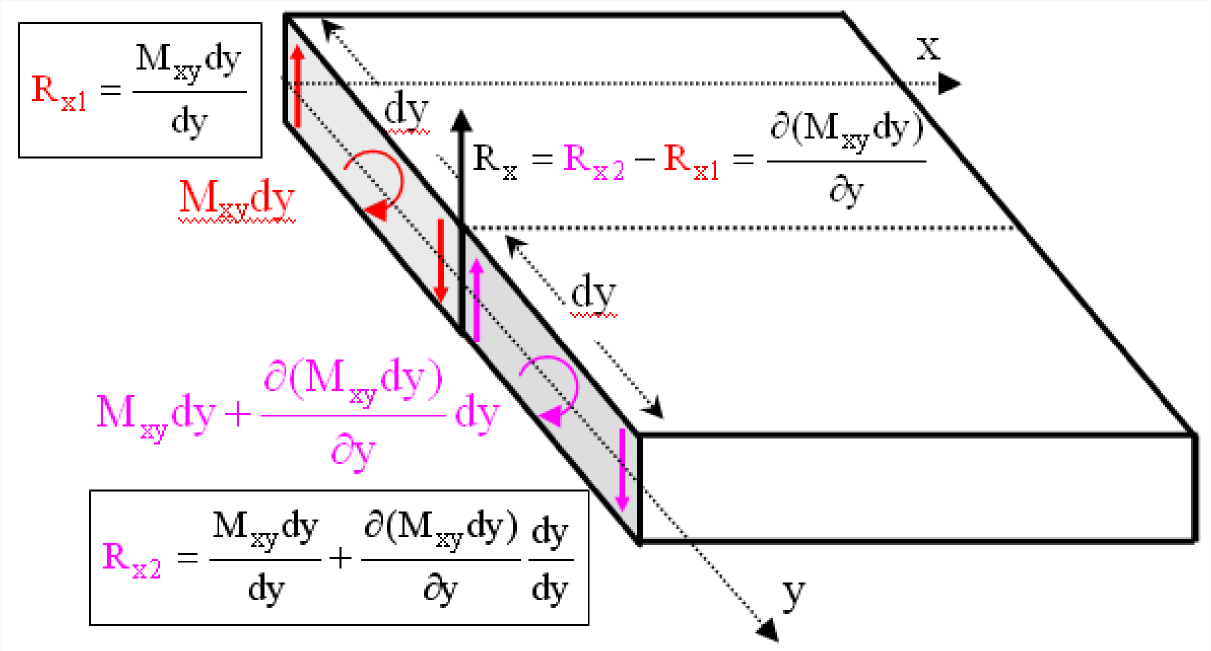


3a.Libera: **condizioni omogenee**

$$M_x = (T_x = M_{xy}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_x = (V) = 0$$





Quindi M_{xy} (M. per unità di lung.) equivale ad una forza di taglio Q_x (per un. di lung.)

$$Q_x = \frac{R_x}{dy} = \frac{R_{x2}}{dy} - \frac{R_{x1}}{dy} = \frac{M_{xy}}{dy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \frac{M_{xy}}{dy} = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

Pertanto T_x=0 e M_{xy}=0 possono quindi essere compattate in una sola condizione:

$$\boxed{\left(V_x\right)_{x=0} = \left(T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{x=0} = -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]_{x=0} = 0}$$

Seguendo quanto fatto sul lato x=0 anche per y=b, allo spigolo x=0,y=b la forza $R_{xb}=M_{xy}(0,b)$ si somma alla $R_{y0}=M_{xy}(0,b)$ come mostrato in fig. a) per cui si ha una forza $R_{0b}=2M_{xy}(0,b)$; con considerazioni analoghe sugli altri spigoli, se $M_{xy} \neq 0$ si hanno le forze concentrate mostrate in fig. b).

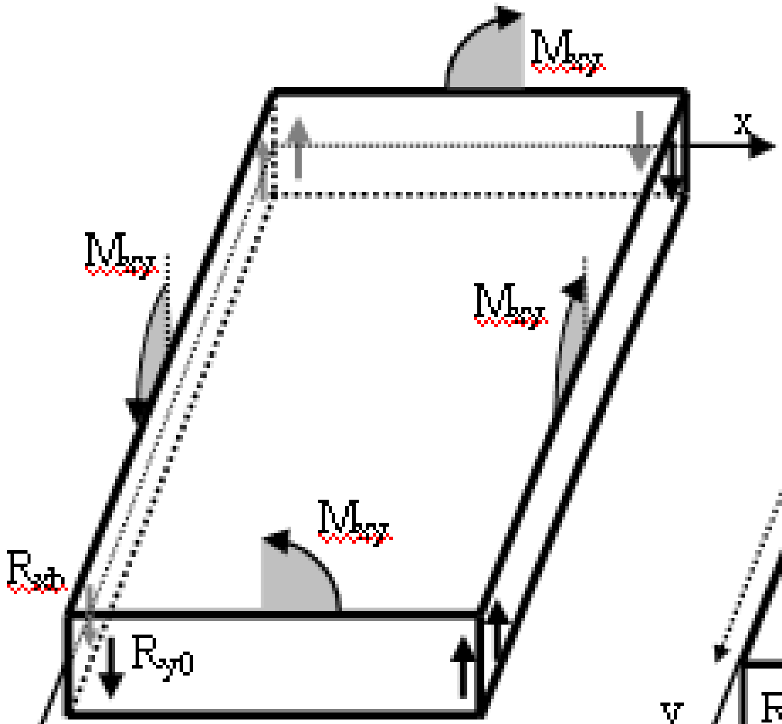


Fig. a)

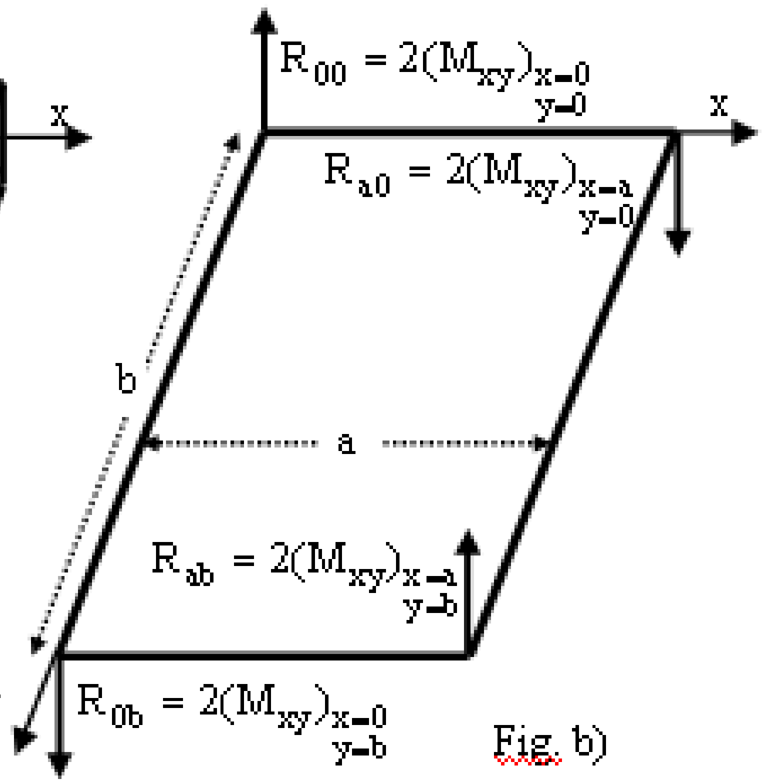
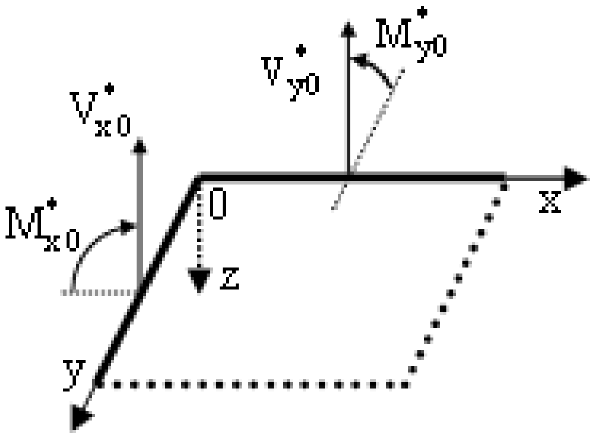


Fig. b)

3b.Libera: condizioni NON omogenee

3b)−condizioni non omogenee: presenza di M* e T* al contorno.

$$(6.1.17)\qquad \begin{cases} (M_x)_{x=0} = M^*_{x0} \\ (M_x)_{x=a} = M^*_{xa} \end{cases} \qquad \begin{cases} (V_x)_{x=0} = V^*_{x0} \\ (V_x)_{x=a} = V^*_{xa} \end{cases}$$



ed utilizzando la formulazione di Kirchhoff

$$(6.1.18)\qquad \begin{cases} (M_x)_{\substack{x=0\\x=a}} = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\x=a}} = \begin{matrix} M^*_{x0}(y) \\ M^*_{xa}(y) \end{matrix} \\[2em] (V_x)_{\substack{x=0\\x=a}} = -D\left[\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\x=a}} = \begin{matrix} T^*_{x0} + \dfrac{\partial M^*_{xy0}}{\partial y} \\[1em] T^*_{xa} + \dfrac{\partial M^*_{xya}}{\partial y} \end{matrix} \end{cases}$$

Espressione generale delle c.c.

Le c. c. prima viste possono essere scritte nella forma:

$$x = 0 : \left\{ \mathcal{B}_x^0[w] \right\} = \left\{ F_x^0(y) \right\} \;\; ; \;\; x = a : \left\{ \mathcal{B}_x^a[w] \right\} = \left\{ F_x^a(y) \right\}$$

$$y = 0 : \left\{ \mathcal{B}_y^0[w] \right\} = \left\{ F_y^0(x) \right\} \;\; ; \;\; y = b : \left\{ \mathcal{B}_y^b[w] \right\} = \left\{ F_y^b(x) \right\}$$

dove ogni vettore è a due componenti con $\mathcal{B}$ operatori differenziali che operano sulla variabile spostamento ed F i carichi esterni.

In particolare, la prima delle (6.1.18) che qui si riscrive:

$$-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0} = M_{x0}^*(y)$$

indicando con:

$$\mathcal{B}_{x1}^0 = -D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)_{x=0} \;\; ; \;\; M_{x0}^* = F_{x1}^0$$

può essere espressa come:

$$\mathcal{B}_{x1}^0[w] = F_{x1}^0$$

Espressione generale delle c.c.

Analogamente la seconda delle (6.1.18) qui riscritta:

$$-D[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}]_{x=0}=T^*_{x0}+\frac{\partial M^*_{xyn}}{\partial y}$$

indicando con:

$$\mathcal{B}^0_{x2}=-D(\frac{\partial^3}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2})_{x=0} \quad ; \quad T^*_{x0}+\frac{\partial M^*_{xyn}}{\partial y}=F^0_{x2}$$

può essere espressa come:

$$\mathcal{B}^0_{x2}[w]=F^0_{x2}$$

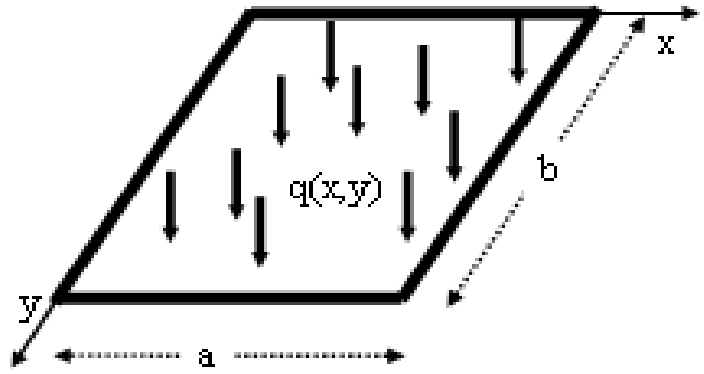
In definitiva le due condizioni (7.2,5) in x=0, ponendo:

$$\left\{\mathcal{B}^0_x[w]\right\}=\begin{Bmatrix}\mathcal{B}^0_{x1}[w]\\ \mathcal{B}^0_{x2}[w]\end{Bmatrix} \quad ; \quad \left\{F^0_x\right\}=\begin{Bmatrix}F^0_{x1}\\ F^0_{x2}\end{Bmatrix}$$

possono essere scritte:

$$\left\{\mathcal{B}^0_x[w]\right\}=\left\{F^0_x\right\}$$

Metodi di soluzione della piastra inflessa



Nel caso di piastra rettangolare di lati a,b soggetta ad un carico q(x,y) l'equazione nel campo si scrive:

$$\text{(8.1)} \qquad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D}$$

a cui vanno associate le condizioni al contorno (7.1), due per ogni lato:

$$\text{(8.2)} \qquad x = 0: \left\{ \mathcal{B}_x^0[w] \right\} = \left\{ F_x^0(y) \right\} \; ; \; x = a: \left\{ \mathcal{B}_x^a[w] \right\} = \left\{ F_x^a(y) \right\}$$

$$\text{(8.3)} \qquad y = 0: \left\{ \mathcal{B}_y^0[w] \right\} = \left\{ F_y^0(x) \right\} \; ; \; y = b: \left\{ \mathcal{B}_y^b[w] \right\} = \left\{ F_y^b(x) \right\}$$

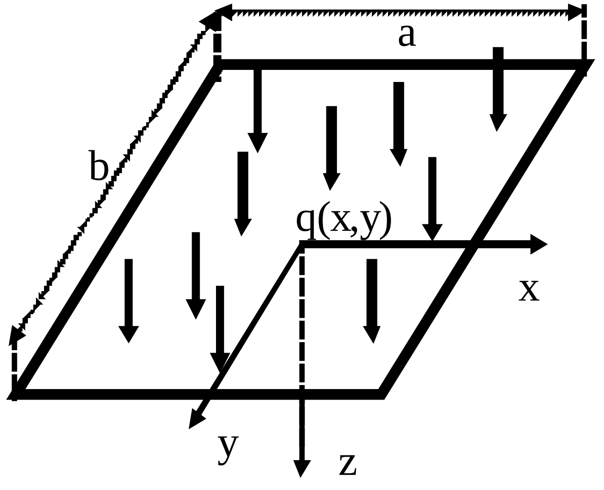
La soluzione analitica esatta del sistema (8.1,2,3) è alquanto complessa e spesso impossibile, per cui si ricorre a metodi anche numerici quali:

– la tecnica dei residui pesati.

–il principio di sovrapposizione, scomponendo il carico q(x,y) nella somma di due o più distinte distribuzioni, pensando le c.c. come combinazioni lineari di altre, …

–la tecnica degli elementi finiti.

–La piastra appoggiata



$$\boxed{D\nabla^4 w = q}$$

$$\begin{cases} w(0,y) = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0} = 0 \\ w(a,y) = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} = 0 \\ w(x,0) = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=0} = 0 \\ w(x,b) = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b} = 0 \end{cases}$$

Si assume:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} w_{mn} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}$$

–La piastra appoggiata

$$\boxed{D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]=q \quad ; \quad w(x,y)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} w_{mn}\,\mathrm{sen}\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{sen}\frac{n\pi y}{b}}$$

$$D\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} w_{mn}\left[(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2\right]^2 \mathrm{sen}(\frac{m\pi x}{a})\mathrm{sen}(\frac{n\pi y}{b})=q(x,y)$$

Metodo di Galerkin

$$D\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} w_{mn}\left[(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2\right]^2 \int_0^a\int_0^b s_m s_n s_p s_q\,dxdy=\int_0^a\int_0^b q(x,y)s_p s_q\,dxdy$$

$$D\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} w_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2 \alpha_{mnpq}=q_{pq} \quad ; \quad \begin{array}{l} p=1,2,\ldots N \\ q=1,2,\ldots M \end{array}$$

$$\boxed{[A]\{W\}=\{Q\}}$$

Piastra appoggiata, $q=q_0$=costante

$$\int_0^a \mathrm{sen}\frac{m\pi x}{a}dx = \frac{a}{m\pi}\int_0^{m\pi}\mathrm{sen}\xi d\xi = \frac{a}{m\pi}[-\cos\xi]_0^{m\pi}$$

$$= \frac{a}{m\pi}[1-\cos m\pi] = \frac{a}{m\pi}[1-(-1)^m] = \frac{2a}{m\pi} \quad ; \quad m=1,3,5,\ldots$$

$$\int_0^b \mathrm{sen}\frac{n\pi y}{b}dy = \frac{2b}{n\pi} \quad ; \quad n=1,3,5,\ldots$$

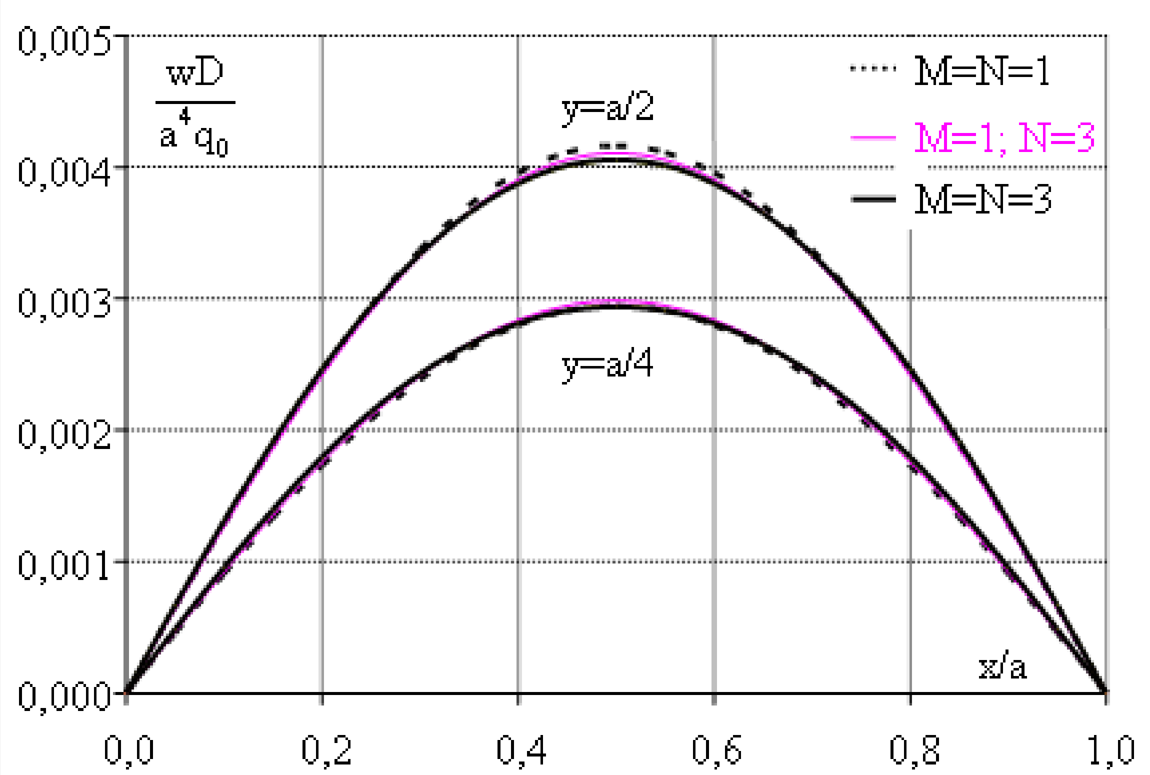
$$q_{pq} = \frac{4q_0}{ab}\int_0^a\int_0^b s_p\, s_q dxdy = \frac{4q_0}{ab}\left[\int_0^a s_p dx\right]\left[\int_0^b s_q dy\right] =$$

$$= \frac{4q_0}{ab}\left[\frac{a}{p\pi}(1-(-1)^p\right]\left[\frac{b}{q\pi}(1-(-1)^q\right] = \frac{16q_0}{pq\pi^2} \quad ; \quad p,q=1,3,5,\ldots$$

$$w_{mn} = \frac{16q_0}{D\pi^6}\frac{1}{mn\left[(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2\right]^2} \quad ; \quad m,n=1,3,5,\ldots$$

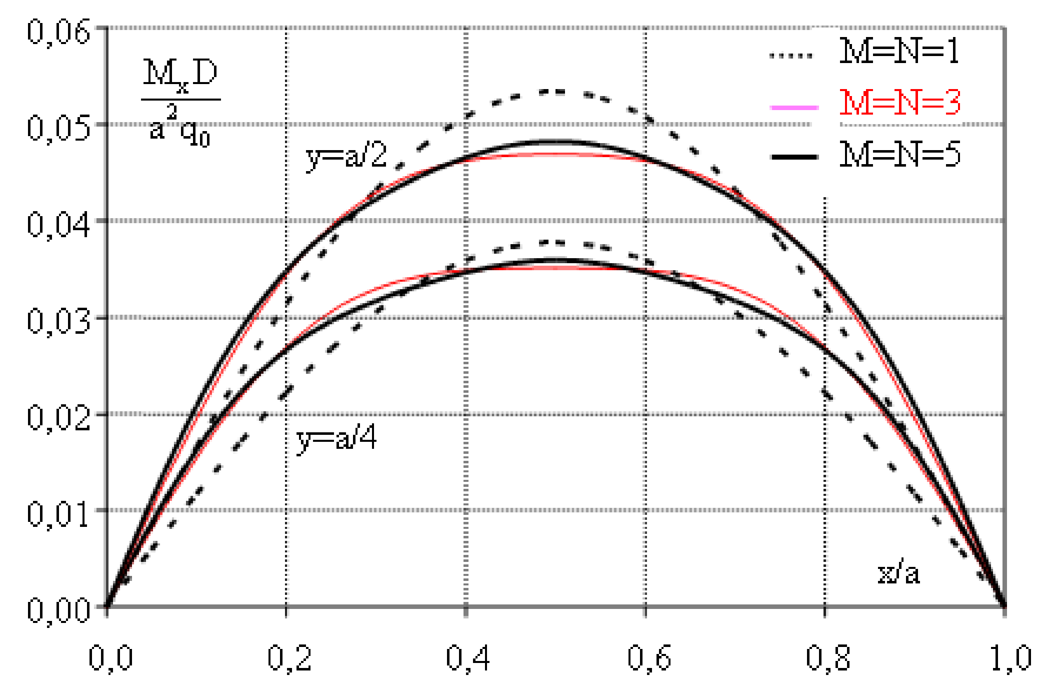
Piastra appoggiata, $q=q_0$=costante

$$w(x,y)=\frac{16a^4q_0}{D\pi^6}\sum_{m=1,3,5}^{M}\sum_{n=1,3,5}^{N}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{mn\left[m^2+\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]^2}$$

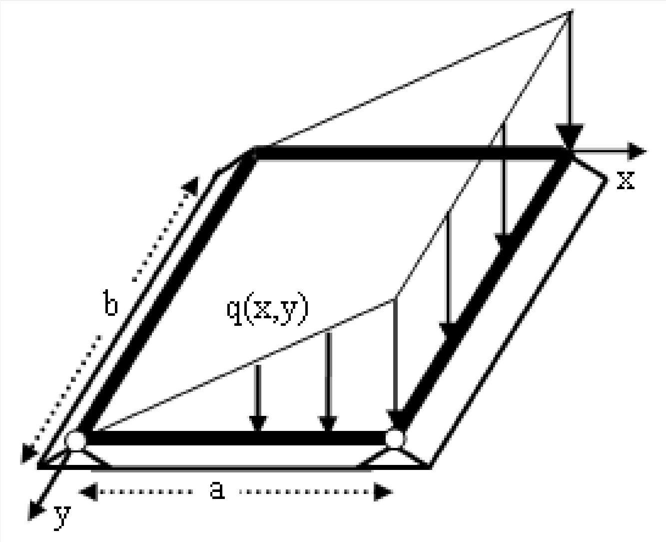


–La piastra appoggiata: $q=q_0$=costante

$$
\begin{cases}
M_x = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \pi^2 D\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\left[(\dfrac{m}{a})^2+\nu(\dfrac{n}{b})^2\right]w_{mn}\,\mathrm{sen}(\dfrac{m\pi x}{a})\mathrm{sen}(\dfrac{n\pi y}{b}) \\
M_y = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \pi^2 D\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\left[(\dfrac{m}{b})^2+\nu(\dfrac{n}{a})^2\right]w_{mn}\,\mathrm{sen}(\dfrac{m\pi x}{a})\mathrm{sen}(\dfrac{n\pi y}{b}) \\
M_{xy} = -(1-\nu)D\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = -\pi^2 D(1-\nu)\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\dfrac{mn}{ab}w_{mn}\cos(\dfrac{m\pi x}{a})\cos(\dfrac{n\pi y}{b})
\end{cases}
$$



Piastra appoggiata, $q=q_0 x/a$



$$\int_0^a x \,\mathrm{sen}\frac{m\pi x}{a}dx = \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2 \int_0^{m\pi} \xi \,\mathrm{sen}\xi d\xi = \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2 [\mathrm{sen}\xi - \xi\cos\xi]_0^{m\pi}$$

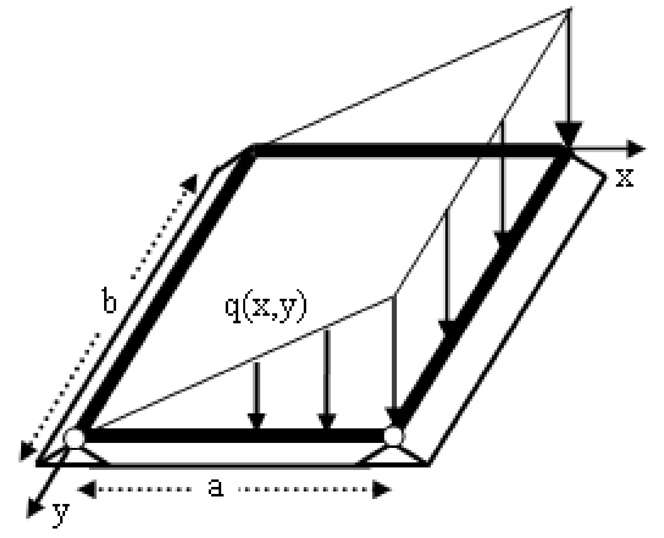
$$= \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2 [0 - m\pi\cos m\pi] = \left(\frac{a}{m\pi}\right)^2 [0 - m\pi(-1)^m]$$

$$= -(-1)^m \frac{a^2}{m\pi} = (-1)^{m+1}\frac{a^2}{m\pi} \quad ; \; m = 1,3,5,\ldots$$

$$q_{pq} = \frac{4q_0}{ab}\int_0^a\int_0^b \frac{x}{a} s_p\, s_q\, dxdy \;\Rightarrow\; q_{pq} = \frac{4q_0}{ab}(-1)^{m+1}\frac{1}{a}\frac{a^2}{p\pi}\frac{2b}{q\pi} = (-1)^{m+1}\frac{8q_0}{pq\pi^2}$$

$$(p\,,q = 1,3,5,\ldots)$$

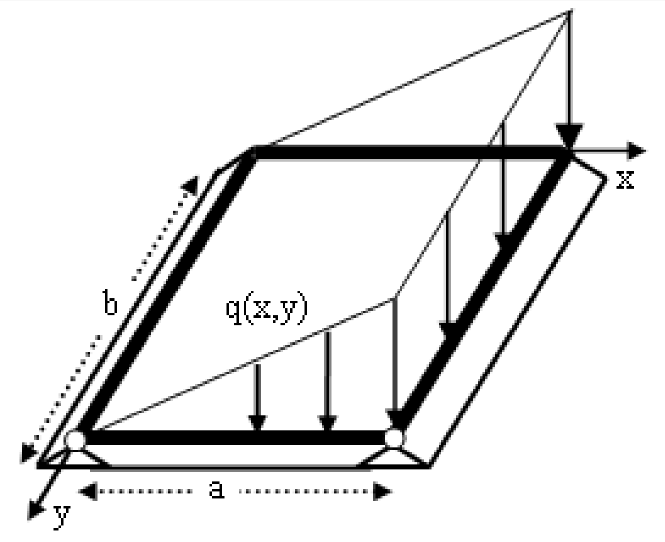
Piastra appoggiata, $q=q_0 x/a$



$$w_{mn} = \frac{8q_0}{D\pi^6} \frac{(-1)^{m+1}}{mn\left[(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2 \right]^2} \quad ; \quad \begin{cases} m = 1, 2, 3, .. \\ n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

$$w(x, y) = \frac{8a^4 q_0}{D\pi^6} \sum_{m=1,2,3}^{M} \sum_{n=1,3.5}^{N} (-1)^{m+1} \frac{\mathrm{sen}(\frac{m\pi x}{a})\mathrm{sen}(\frac{n\pi y}{b})}{mn\left[m^2 + (\frac{a}{b} n)^2 \right]^2}$$

Piastra appoggiata, $q=q_0x/a$



$$w_{mn}=\frac{8q_0}{D\pi^6}\frac{(-1)^{m+1}}{mn\left[(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2\right]^2} \quad ; \quad \begin{cases} m=1,2,3,.. \\ n=1,3,5,... \end{cases}$$

$$w(x,y)=\frac{8a^4q_0}{D\pi^6}\sum_{m=1,2,3}^{M}\sum_{n=1,3.5}^{N}(-1)^{m+1}\frac{\operatorname{sen}(\frac{m\pi x}{a})\operatorname{sen}(\frac{n\pi y}{b})}{mn\left[m^2+(\frac{a}{b}n)^2\right]^2}$$

Piastra appoggiata, $q=q_0 x/a$